УДК 514.18

Е.О. Чернишова

ЗНАХОДЖЕННЯ В ПЛОЩИНІ ДІЙСНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ПЕРЕТИНУ УЯВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Постановка проблеми. При побудові різних геометричних елементів часто за умову ставлять необхідність проходження цих елементів через точки, координати яких є дійсними числами. Розв'язуючи рівняння або системи рівнянь для знаходження точок перетину певних геометричних елементів, як правило відкидають розв'язки, які містять комплексні числа. Тим самим відкидаються певні елементи як дійсних, так і уявних геометричних елементів.

Аналіз останніх досліджень. Проблемою застосування функцій комплексних змінних для геометричних побудов займалися Курек Г.К., Черніков О.В., Куценко Л.М., Шоман О.В. та інші [1-2].

Постановка завдання. Побудувати дотичні до параболи та кола в точках їх перетину з прямими у випадках, коли координати цих точок є як дійсними, так і комплексними числами.

Основна частина. Розглянемо параболу на площині, задану рівнянням:

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

де a, b, c – дійсні числа. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox, прирівнявши рівняння (1) до нуля. Побудуємо в цих точках дотичні до параболи за формулою $y - y_0 = y'\big|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$:

$$y = -\sqrt{b^2 - 4ac}\,x - \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2}{2a} + 2c, \tag{2}$$

$$y = \sqrt{b^2 - 4ac}\,x + \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2}{2a} + 2c. \tag{2'}$$

За умови, що підкореневий вираз в (2) і (2′) $b^2 - 4ac < 0$, дотичні до параболи будуть проходити через уявні точки. Це означає, що рівняння (2) і (2′) на площині задають уявні прямі. Знайдемо точку перетину дотичних (2) і (2′), прирівнявши праві частини:

$$-\sqrt{b^2 - 4ac}\,x - \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2}{2a} + 2c = \sqrt{b^2 - 4ac}\,x + \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2}{2a} + 2c.$$

Звідси $x=-\dfrac{b}{2a}$, відповідно $y=2c-\dfrac{b^2}{2a}$. Таким чином точка перетину дотичних (як дійсних, так і уявних) є дійсною точкою. Слід зазначити, що у тому випадку, коли маємо дійсні дотичні, точка їх перетину знаходиться ззовні параболи, а точка перетину уявних дотичних знаходиться в області, обмеженій параболою.

Нехай маємо параболу (1) і довільну точку Р (d, e). Проведемо через точку Р довільну пряму:

$$y=k(x-d)+e, \tag{3}$$

де $k=tg\,\alpha$. Знайдемо точки перетину прямої (3) та параболи (1), прирівнявши праві частини (1) і (3). Після розв'язку одержаного квадратного рівняння маємо:

$$\begin{array}{l} x_1=\dfrac{k-b-\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}}{2a}, \\ y_1=e+\dfrac{k[-b-2ad+k-\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}]}{2a} \end{array}, \tag{4}$$

$$\begin{array}{l} x_2=\dfrac{k-b+\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}}{2a}, \\ y_2=e+\dfrac{k[-b-2ad+k+\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}]}{2a} \end{array}. \tag{4'}$$

Проведемо дотичні до параболи в точках (4) та (4′) аналогічно першому випадку:

$$\begin{array}{l} y=2c-e+dk-\dfrac{(b-k)[b-k+\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}]}{2a}+ \\ \qquad +[k-\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}]x \end{array}, \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} y=2c-e+dk+\dfrac{(b-k)[k-b+\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}]}{2a}+ \\ \qquad +[k+\sqrt{(b-k)^2-4a(c-e+dk)}]x \end{array}. \tag{5'}$$

Координати точки перетину дотичних мають вигляд:

$$x=\frac{k-b}{2a},\ y=\frac{bk-b^2+2a(2c-e+dk)}{2a}. \tag{6}$$

При зміні кута нахилу α в межах $\alpha=[0,\pi]$, рівняння (6) будуть параметричними рівняннями прямої з параметром k. При цьому пряма може проходити через точки як ззовні параболи, так і в області, обмеженій параболою, – в залежності від значень коефіцієнтів *a, b, c, d, e*.

Розглянемо приклад. Нехай $a=0,5$; $b=2$; $c=4$; $d=-6$; $e=1$ (рис. 1). Парабола (1) має вигляд:

$$y = 0,5x^2 + 2x + 4 .$$

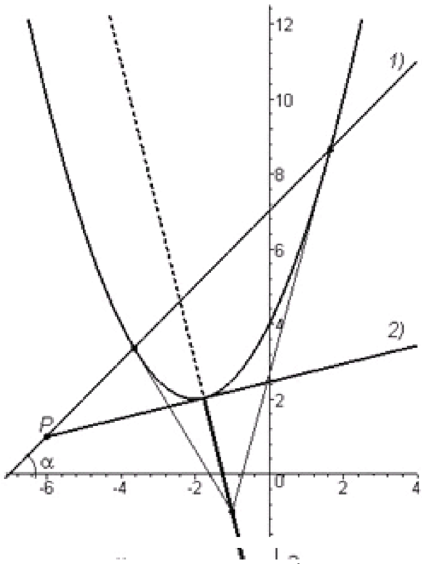


Рис. 1 – Пряма, утворена рівняннями (6):
1) – $k = 1$ (при $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) > 0$)
2) $k = 0,24$ (при $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) = 0$)

Надамо параметру *k* значення $k=1$ і проведемо пряму (3) через точку *P (−6, 1)*: $y = x + 7$ (на рис. 1 пряма *1*). Знайдемо точки перетину параболи (1) та прямої (3), підставивши в рівняння значення коефіцієнтів. Оскільки

$(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) > 0$, маємо дві дійсні точки перетину з координатами:

$x_1 =$ 3,65; $y_1 =$ 3,35; та $x_2 =$ 1,65; $y_2 =$ 8,65.

Проведемо в цих точках за формулами (5), (5′) дотичні до параболи:

$$y = -2,65 - 1,65x \text{ і } y = 2,65 + 3,65x .$$

Прирівнявши праві частини рівнянь дотичних, знайдемо точку їх перетину $x = -1$, $y = -1$. Надамо параметру *k* значення $k=0,24$ так, щоб $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) = 0$ і пряма (3) стала дотичною до параболи (на рис. 1 пряма *2*). Тоді рівняння прямої (3) запишеться: $y = 0,24x + 2,44$. В цьому випадку дві точки перетину параболи (1) та прямої (3) збігаються в одну точку: $x_1 = x_2 =$ 1,76; $y_1 = y_2 =$ 2,0176.

При заданих коефіцієнтах *a, b, c, d, e* рівняння (6) запишеться:

$$x = k - 2; \; y = 3 - 4k \text{ або } y = -4x - 5 .$$

Ділянка прямої, показана на рис.1 штриховою лінією, є результатом перетину дотичних до параболи, проведених в точках, координати яких є комплексними числами (тобто для яких $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) < 0$).

Візьмемо тепер замість параболи коло радіуса R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{7}$$

Проведемо через довільну точку Р (c, d) пряму, яка при перетині кола в дійсних точках є для нього полярою:

$$y=k(x-c)+d. \tag{8}$$

В загальному випадку точки перетину прямої (8) з колом (7) визначаться із розв'язку квадратного рівняння аналогічно знаходженню (4), (4′):

$$x_1=\frac{a+k(b-d+ck)-\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2}}{1+k^2},$$

$$y_1=\frac{d+k(a-c+bk-\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}{1+k^2}, \tag{9}$$

$$x_2=\frac{a+k(b-d+ck)+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2}}{1+k^2},$$

$$y_2=\frac{d+k(a-c+bk+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}{1+k^2}, \tag{9′}$$

У залежності від сталих величин a, b, c, d, k, R ці точки можуть бути дійсними, уявними, або ж збігатимуться в тому випадку, коли підкореневий вираз дорівнює нулю.

Через точки (9) та (9′) проведемо відповідно дотичні до кола, рівняння яких в загальному випадку запишуться:

$$\begin{aligned} y=&\frac{b^2+a^2k^2-(1+k^2)R^2+a(kd-ck^2+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}{b-d+k(c-a+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}+\\ &+\frac{b(-d+k(c-2a+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2}))}{b-d+k(c-a+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}-\\ &-x\frac{k(d-b+(a-c)k)+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2}}{b-d+k(c-a+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y=&\frac{b^2+a^2k^2-(1+k^2)R^2-a(-kd+ck^2+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}{b-d-k(a-c+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}-\\ &-\frac{b(d+k(2a-c+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2}))}{b-d-k(a-c+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})}- \end{aligned}$$

 ISSN 1562-9945

$$-x\frac{k(b-d+(c-a)k)+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2}}{d-b+k(a-c+\sqrt{R^2(1+k^2)-(b-d-ak+ck)^2})} \qquad (10')$$

Рівняння (10) і (10′) охоплюють як дійсні дотичні, що проходять через дійсні точки дотику, так і уявні, які проходять через уявні точки дотику, які в загальному випадку визначаються рівняннями (9), (9′). Цікаво те, що перетином як дійсних, так і уявних прямих завжди будуть дійсні точки:

$$x=a+\frac{kR^2}{b-d-ak+ck},$$

$$y=b-\frac{R^2}{b-d-ak+ck} \qquad (11)$$

Якщо точки перетину кола (7) та прямої (8) (поляри) мають дійсні координати, то точка перетину дотичних (10) і (10′) (полюс) знаходиться ззовні заданого кола. Якщо ж точки перетину кола (7) та прямої (8) мають комплексні координати, то точка перетину дотичних (10) і (10′) знаходиться в області, обмеженій колом.

Надаючи куту нахилу α значень від *0* до π, рівняння (11) будуть задавати параметричні рівняння прямої – геометричного місця полюсів (рис. 2). Ділянка прямої, показана штриховою лінією, отримана як результат перетину уявних дотичних. Таким чином, нехтування уявними точками дотику і уявними дотичними до кола дало б обмежений розв'язок в дійсній області. Проміжні результати можуть бути уявними, але в кінцевому підсумку вони дають реальний результат.

Надаючи куту нахилу α значень від *0* до π, рівняння (11) будуть задавати параметричні рівняння прямої – геометричного місця полюсів (рис. 2). Ділянка прямої, показана штриховою лінією, отримана як результат перетину уявних дотичних. Таким чином, нехтування уявними точками дотику і уявними дотичними до кола дало б обмежений розв'язок в дійсній області. Проміжні результати можуть бути уявними, але в кінцевому підсумку вони дають реальний результат.

Після зроблених побудов ми можемо розглядати точку *P* як полюс, а одержану пряму – як поляру.

За умови розміщення точки Р (c, d) на колі (7) пряма (11) буде дотикатися до кола в точці Р (рис. 3, а). Якщо точка Р знаходитиметься всередині кола (7), пряма (11) буде знаходитися повністю ззовні цього кола (рис. 3, б).

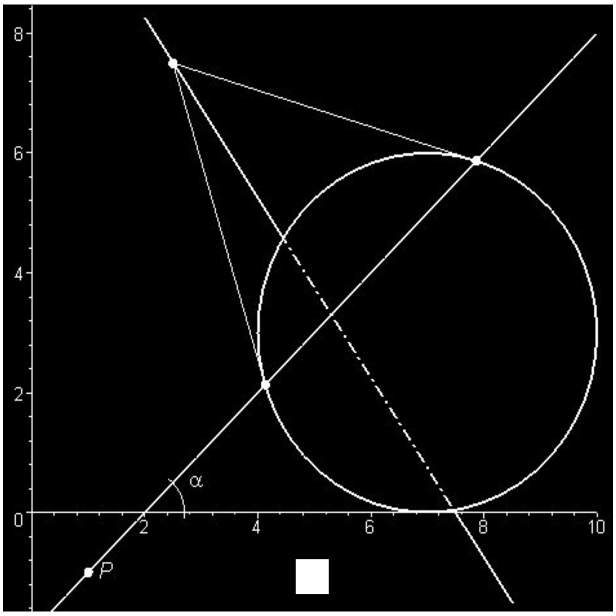
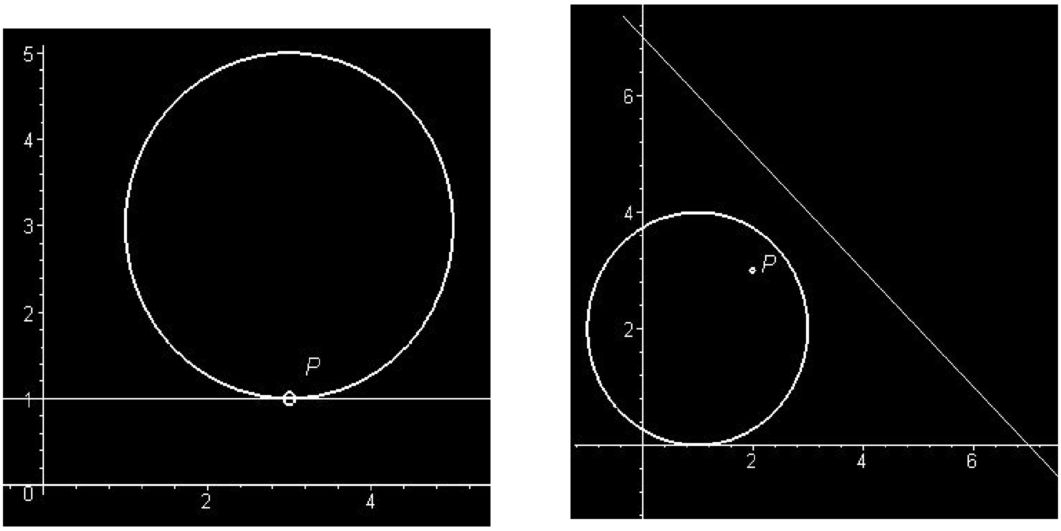


Рис. 2 – Точка P знаходиться ззовні кола при наступних значеннях коефіцієнтів: $R=3,\ a=7,\ b=3,\ c=1$



а) б)

Рис. 3. Взаємне розміщення полюса і поляри: а) полюс P розташований на колі; б) полюс P розташований всередині кола

Висновки. В статті розглянуто побудову дотичних до параболи та кола, що проходять через точки, координати яких є як дійсними, так і комплексними числами. Знайдено точки перетину побудованих дотичних, які завжди є дійсними числами. Показано, що нехтування уявними геометричними елементами дає неповний розв’язок в дійс-

 ISSN 1562-9945

ній області: проміжні уявні результати в кінцевому підсумку дають реальні геометричні елементи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курек Г.К. Формообразование некоторых алгебраических минимальных поверхностей линейным каркасом специальных линий // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1975. – Вып. 20.– С. 99 – 102.
2. Шоман О.В. Геометрична інтерпретація комплексних потенціалів аналітичних функцій // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74.– С. 210 –215.

Получено 14.03.2006 г.

УДК 515.2

О.В. Шоман

МЕТОД АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ ПАРИ ПОВЕРХОНЬ, ЯКІ ПАРАЛЕЛЬНІ ГІПЕРБОЛІЧНОМУ ПАРАБОЛОЇДУ

Постановка проблеми. При дослідженні розвитку у часі гетерогенної системи речовин вважають, що геометрична форма активної поверхні розділу змінюється у просторі за певним законом (наприклад, за „геометричним" законом горіння [1]). Графічна ілюстрація динаміки розвитку системи полягає у зображенні поверхонь розділу для певних фаз процесу. Такі поверхні можна ототожнювати з *еквіфазними поверхнями* хвильового процесу, або, у тривіальному випадку, з паралельними поверхнями. Тому є актуальним описи паралельних поверхонь як графічного прояву активної поверхні розділу речовин.

Аналіз останніх досліджень. Паралельні поверхні можна описувати в результаті розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних виду ейконал [2], або за допомогою нормальних рівнянь [3]. Другий підхід вважається більш універсальним, адже він спирається на графічне пояснення зв'язку між функцію-описом f і об'єктом-оригіналом L, яке полягає у виконанні умови

$$f(P) = \inf_{G} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2}\,; \qquad (G = (\xi_1\,,\ \dots\ \xi_n) \in L).$$