

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ ПОЛІКООРДИНАТНИХ В – СПЛАЙНІВ

Постановка проблеми. Однією з кінцевих цілей теоретичних досліджень у прикладній геометрії є конструювання або моделювання кривих поверхонь, які відносять до найбільш важливих та найскладніших задач. При деформації поверхонь виникають проблеми щодо збереження адекватного перетворення, особливо це стосується перетворень, які відбуваються при переході з опуклої форми в неопуклу і навпаки.

Аналіз останніх досліджень. Різні методи конструювання поверхонь широко застосовують у геометрії, зокрема, у техніці, де поверхні слугують об'єктом інженерних досліджень, в моделюванні динамічних процесів та явищ.

Найбільше застосування при моделюванні поверхонь отримав кінематичний спосіб утворення поверхонь. Поверхні, які утворюються цим методом, називають кінематичним [1].

При застосуванні полікоординатного методу [2, 4] виникають неадекватні перетворення, особливо коли це стосується переходу з опуклої форми в неопуклу і навпаки. У [3] запропонований метод полікоординатних В-сплайнів, який, однак, остаточно не запобігає останньої вади.

У роботах [4, 5] опрацьовані методологічні засади й створені практичні способи (різного ступеня завершеності) конструювання і геометричного моделювання каркасно-кінематичних поверхонь (на основі методу політканинних перетворень) різного функціонального призначення. Але в цих роботах не розглянуто адекватність політканинного перетворення при переході від опуклої форми об'єкта в неопуклу і навпаки.

Формулювання цілей статті. Моделювання поверхонь вимагає застосування таких методів, які б уможливили здійснювати адекватне перетворення, відстежувати зміни форми та місця положення об'єкта, що досліджується, з урахуванням параметрів, які впливають на нього. Особливо це стосується поверхонь, які підлягають деформації.

© Л.С.Чорна, 2006

Метою цієї роботи є розробка методу моделювання криволінійних поверхонь на основі векторно-параметричного полікоординатного методу.

Основна частина. Визначимо кінематичну поверхню за допомогою просторових кривих (твірних), що рухаються за просторовими кривими (направляючими) із використанням полікоординатних параметричних В-сплайнів.

Припустимо, що твірна задається параметрично у вигляді:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad (1)$$

де u - параметр твірної. Направляючу визначимо параметрично у вигляді:

$$x = x(v), \quad y = y(v), \quad z = z(v), \quad (2)$$

де v - параметр направляючої.

Прямі базису політканини твірної відтворюються параметрично:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{i-1} \cdot (1 - u) + x_i \cdot u; \\ y &= y_{i-1} \cdot (1 - u) + y_i \cdot u; \\ z &= z_{i-1} \cdot (1 - u) + z_i \cdot u, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Прямі базису направляючої сформуємо також параметрично згідно залежностей:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{j-1} \cdot (1 - v) + x_j \cdot v; \\ y &= y_{j-1} \cdot (1 - v) + y_j \cdot v; \\ z &= z_{j-1} \cdot (1 - v) + z_j \cdot v, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким чином визначаються два первинних базиси, один із яких відноситься до твірної кінематичної поверхні, а другий – до направляючої кривої. Базис політканини як твірної, так і направляючої формується за допомогою точок перетину відповідних базисних прямих (базис твірної – точки $T_{00}, T_{10}, \dots, T_{i0}$, базис направляючої – точки $T_{i0}, T_{i1}, \dots, T_{ij}$) (рис. 1).

Базис просторової кінематичної поверхні утворюється переміщенням базису твірної за базисом направляючої. Таким чином формується політканина кінематичної поверхні просторовим каркасним базисом із визначеними точками перетину. Направляюча просторової кінематичної поверхні формується ортогонально до твірної у залежності від параметра v за тією ж методикою, яка зазначена для визначення твірної.

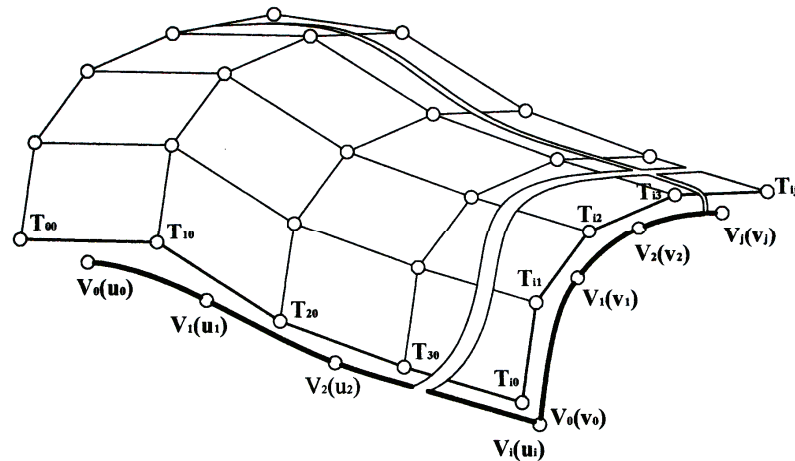


Рис. 1. Формування просторового каркаса кінематичної поверхні

Визначимо кінематичну поверхню за допомогою політканинного векторно-параметричного перетворення на основі В-сплайнів (NURBS) із використанням наступного функціонала:

$$\left. \begin{aligned} S_{xuv} &= \sum_{i=1}^n K_i(u) \left[\frac{(X_{i-1} + X(v)) \cdot (1-u) + (X_i + X(v)) \cdot u - X_r(u,v)}{x_{i-1}(v) \cdot (1-u) + x_i(v) \cdot u - x_r(u)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\ S_{yuv} &= \sum_{i=1}^n K_i(u) \left[\frac{(Y_{i-1} + Y(v)) \cdot (1-u) + (Y_i + Y(v)) \cdot u - Y_r(u,v)}{y_{i-1}(v) \cdot (1-u) + y_i(v) \cdot u - y_r(u)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\ S_{zuv} &= \sum_{i=1}^n K_i(u) \left[\frac{(Z_{i-1} + Z(v)) \cdot (1-u) + (Z_i + Z(v)) \cdot u - Z_r(u,v)}{z_{i-1}(v) \cdot (1-u) + z_i(v) \cdot u - z_r(u)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де $x_{i-1}, x_i, y_{i-1}, y_i, z_{i-1}, z_i$ – координати базових ліній первинного базису політканини твірної відповідно в системах координат ux, uy, uz ; $X_{i-1}, X_i, Y_{i-1}, Y_i, Z_{i-1}, Z_i$ – координати базових ліній перетвореного базису політканини твірної відповідно в системах координат ux, uy, uz ; $X(v) = X_r(v) - X_n$; $Y(v) = Y_r(v) - Y_n$; $Z(v) = Z_r(v) - Z_n$,

Тут $X_r(v), Y_r(v), Z_r(v)$ – координати направляючої кривої, що визначається в залежності від параметра v ; X_n, Y_n, Z_n – координати останньої точки базису твірної; $X_m(u, v), Y_r(u, v), Z_r(u, v)$ – координати точок кінематичної поверхні; $x_m(u), y_m(u), z_m(u)$ – координати точок твірної; $K_i(u)$ – спеціальний ваговий коефіцієнт, зміст якого визначено у статті Бадаєва Ю.І. [3].

Диференціюючи функціонал (5) за X, Y і Z , та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо систему рівнянь, розв'язком якої є координати точок поверхні:

$$\left. \begin{aligned}
X_r(u, v) &= \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u) \cdot ((X_{i-1} + X(v)) \cdot (1-u) + (X_i + X(v)) \cdot u)}{x_{i-1}(1-u) + x_i u - x_r(u)}}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{x_{i-1}(1-u) + x_i u - x_r(u)}} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{(x_{i-1}(1-u) + x_i u - x_r(u))^2}; \\
Y_r(u, v) &= \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u) \cdot ((Y_{i-1} + Y(v)) \cdot (1-u) + (Y_i + Y(v)) \cdot u)}{y_{i-1}(1-u) + y_i u - y_r(u)}}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{y_{i-1}(1-u) + y_i u - y_r(u)}} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{(y_{i-1}(1-u) + y_i u - y_r(u))^2}; \\
Z_r(u, v) &= \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u) \cdot ((Z_{i-1} + Z(v)) \cdot (1-u) + (Z_i + Z(v)) \cdot u)}{z_{i-1}(1-u) + z_i u - z_r(u)}}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{z_{i-1}(1-u) + z_i u - z_r(u)}} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{(z_{i-1}(1-u) + z_i u - z_r(u))^2}.
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для визначення координат точок направляючої здійснимо параметричне полікоординатне перетворення з використанням наступного функціонала:

$$\left. \begin{aligned}
S_{xv} &= \sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{X_{j-1} \cdot (1-v) + X_j \cdot v - X_r(v)}{x_{j-1} \cdot (1-v) + x_j \cdot v - x_r(v)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\
S_{yv} &= \sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Y_{j-1} \cdot (1-v) + Y_j \cdot v - Y_r(v)}{y_{j-1} \cdot (1-v) + y_j \cdot v - y_r(v)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\
S_{zv} &= \sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Z_{j-1} \cdot (1-v) + Z_j \cdot v - Z_r(v)}{z_{j-1} \cdot (1-v) + z_j \cdot v - z_r(v)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min.
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де $x_{j-1}, x_j, y_{j-1}, y_j, z_{j-1}, z_j$ - координати базових ліній первинного базису політканини направляючої кривої відповідно в системах координат vx, vy, vz ; $X_{j-1}, X_j, Y_{j-1}, Y_j, Z_{j-1}, Z_j$ - координати базових ліній перетвореного базису політканини направляючої кривої відповідно в системах координат vx, vy, vz ; $X_r(v), Y_r(v), Z_r(v), x_r(v), y_r(v), z_r(v)$ - координати точок відповідно первинної і перетвореної направляючої кінематичної поверхні; $K_i(v)$ - спеціальний ваговий коефіцієнт.

Після диференціювання функціонала (7), прирівнюючи його до нуля отримаємо систему рівнянь, розв'язком якої будуть координати направляючої:

$$\left. \begin{aligned}
 X_r(v) &= \frac{\sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{X_{j-1}(1-v) + X_j v}{x_{j-1}(1-v) + x_j v - x_r(v)} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{(x_{j-1}(1-v) + x_j v - x_r(v))^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{x_{j-1}(1-v) + x_j v - x_r(v)}}; \\
 Y_r(v) &= \frac{\sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Y_{j-1}(1-v) + Y_j v}{y_{j-1}(1-v) + y_j v - y_r(v)} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{(y_{j-1}(1-v) + y_j v - y_r(v))^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{y_{j-1}(1-v) + y_j v - y_r(v)}}; \\
 Z_r(v) &= \frac{\sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Z_{j-1}(1-v) + Z_j v}{z_{j-1}(1-v) + z_j v - z_r(v)} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{(z_{j-1}(1-v) + z_j v - z_r(v))^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{z_{j-1}(1-v) + z_j v - z_r(v)}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Гвинтові поверхні, і, зокрема, прямий гелікоїд, широко застосовуються в техніці. Тому, як приклад, на рис. 2 представлена сформована (з використанням залежностей (6) з урахуванням формул (8)) параметрична гвинтова поверхня у вигляді точкового каркасу. Необхідно відмітити, що біля поверхні визначено базис політканини (на рис. 2 не представлено у зв'язку зі складністю відображення), таким чином, гвинтова поверхня занурена в політканину.

Для необхідного перетворення гвинтової поверхні достатньо деформувати базис політканини (рис. 3).

Відповідно до зміни базису відбувається адекватне перетворення гвинтової поверхні. Таким чином, формується геометричний об'єкт необхідної форми.

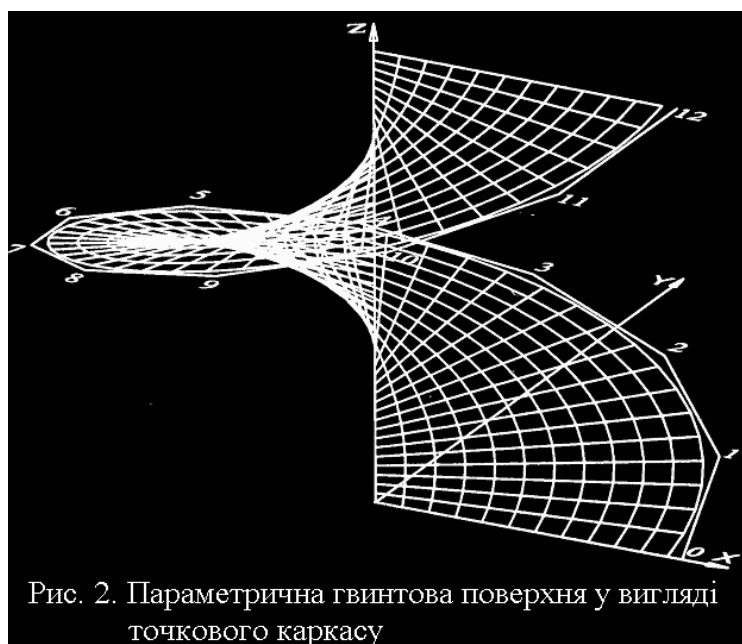


Рис. 2. Параметрична гвинтова поверхня у вигляді точкового каркасу

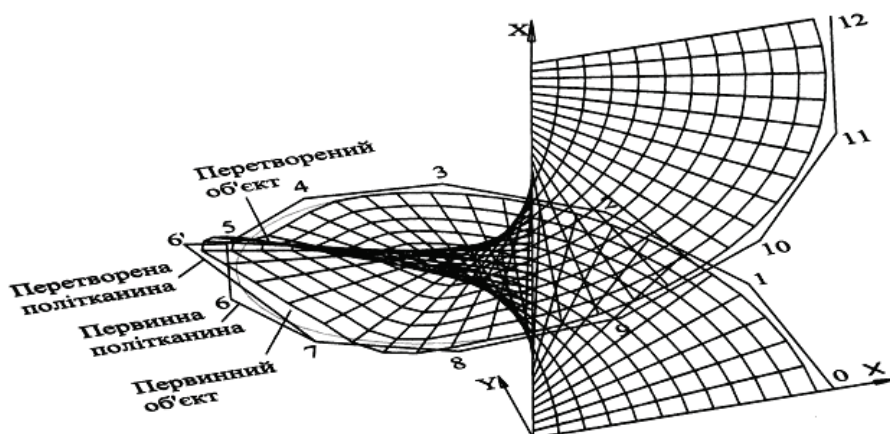


Рис. 3. Перетворення векторно-параметричної гвинтової каркасної поверхні із неопуклого в опукле

Висновок. Задання поверхонь полікоординатним векторно-параметричним методом дає можливість більш адекватного перетворення поверхні при моделюванні. Цей метод має переваги перед відомими методами за рахунок того, що надає можливість здійснення адекватного перетворення поверхні, зокрема при переході від неопуклої форми об'єкта в опуклу і навпаки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Громов М.Я. Начертательная геометрия. Пространственные кривые линии. – М.: ВЗПИ, 1954. – 280 с.
2. Бадаєв Ю.І. Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення тривимірного простору у деформативному конструюванні ГО // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1997. – Вип. 62. – С. 33-39.
3. Бадаєв Ю.І. Криві на основі політканинних В-сплайнів // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Праці Таврійської Державної агротехнічної академії – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – Вип. 4. – Том 28. – С. 16 – 20.
4. Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення у деформативному конструюванні геометричних об'єктів. – К. Педагогічна думка, 2001. – 380 с.
5. Дорошенко Ю.О. Варіанти конструювання кінематичних поверхонь із застосуванням політканинних перетворень// Прикладная геометрия и инженерная графика: Труды Таврической государственной агротехнической академии, 1998. – Вып. 4. – Том 3.. – С. 55-58.

Получено 18.03.2006 г.