УДК 515.2:518.1

О.В. Цыбуленко, И.А. Лурье, Н.В. Корниловская

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБАТУР ТИПА ГАУССА - ЛЕЖАНДРА НА ТРЕУГОЛЬНОМ ДИСКРЕТНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Постановка проблемы. Представление свойств, явлений, процессов, состояний через кратные интегралы очень распространено в научных исследованиях. Многие геометрические и механические величины, которые связаны с непрерывным распределением масс в пределах некоторой плоской фигуры или тела в пространстве, выражаются двойными или, соответственно, тройными интегралами, которые распространяются на эту фигуру или тело. Сюда включаются такие основные величины, как площадь, объем, масса, центр масс, статические моменты и моменты инерции.

При применении метода конечных элементов в инженерных расчетах возникает необходимость расчета матриц, которые определяют свойства элемента, таких как матрицы жесткости, матрицы масс и т.д. При вычислении элементов матриц возрастает сложность подынтегральных выражений, что делает алгебраические выкладки весьма громоздкими. В таких случаях приходится прибегать к численному интегрированию, при котором стандартный интеграл заменяется кубатурной суммой. Отметим, что с точки зрения метода дискретных элементов, как отмечал Зенкевич [1], даже лучше, что интегралы будут вычислены приближенно, а не точно. Избыточная жесткость, которая возникает как следствие аппроксимации дискретными элементами, может быть компенсирована приближенным интегрированием. Это в свою очередь сглаживает погрешность самого МКЭ как численного метода.

Формулы, в которых варьируются не только весовые коэффициенты, а и координаты узлов интегрирования (кубатуры типа Гаусса - Лежандра) дают наилучшую точность, поэтому представляют наибольший интерес для исследователей.

Алгебраический подход приводит к отрицательным весам в спектре. Такие модели не рекомендуют к практическому применению.

 ISSN 1562-9945

Анализ предшествующих исследований. Вопросы приближенного интегрирования на дискретных элементах рассматривались в работах Зенкевича О. [1], Сегерлинда Л. [2], Бенерджи П. и Баттерфилда Р. [3]. Во всех этих работах, к сожалению, для треугольного дискретного элемента третьего порядка была допущена ошибка, которая вплоть до выхода в свет книги [4] тиражировалась другими авторами. Ошибка состоит в нарушении соответствия между барицентрическими координатами узлов интегрирования и весовыми коэффициентами кубатуры. Авторы указанных публикаций не рекомендуют пользоваться кубатурной формулой из-за отрицательного веса и ошибок округления. Между тем, главным источником погрешностей кубатуры является не отрицательный вес в центре шаблона, а неправильное расположение периферийных узлов. В работе [5] указанная кубатура была реабилитирована. Несоответствие было устранено. Однако, из-за наличия отрицательного весового коэффициента, нарушается физическое правдоподобие спектра весов.

Первые попытки статистически смоделировать весовые коэффициенты были описаны в работах [6,7,8], где рассматривались кубатуры типа Ньютона – Котеса. Для таких моделей оказалось удобно использовать схемы случайных блужданий с поглощениями в граничных узлах. Для моделей типа Гаусса – Лежандра такие схемы не пригодны. Необходимо использовать схемы блужданий с отражающими границами.

Постановка задачи. Задача состоит в статистическом нахождении весовых коэффициентов кубатур типа Гаусса – Лежандра на треугольном дискретном элементе с помощью моделирования случайных блужданий

Основная часть. Основываясь на результатах работы [5], для дискретного элемента третьего порядка (рис. 1), существуют следующие соответствия между барицентрическими координатами узлов интегрирования и кубатурами:

$$0\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\ 1\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right),\ 2\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right),\ 3\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right); \tag{1}$$

$$\iint_D f\,\mathrm{dS} \approx \operatorname{mes} D\left(-\frac{27}{48}f_0+\frac{25}{48}\sum_{i=1}^{3}f_i\right) \tag{2}$$

$$0\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\ 1\left(\frac{11}{15};\frac{2}{15};\frac{2}{15}\right),\ 2\left(\frac{2}{15};\frac{11}{15};\frac{2}{15}\right),\ 3\left(\frac{2}{15};\frac{2}{15};\frac{11}{15}\right); \tag{3}$$

$$\iint_D f\,\mathrm{dS} \approx \operatorname{mes} D\left(\frac{33}{108} f_0 + \frac{25}{108}\sum_{i=1}^{3} f_i\right). \tag{4}$$

Для маршрутизации случайных блужданий на элемент накладывается сетка с треугольными ячейками (рис. 2).

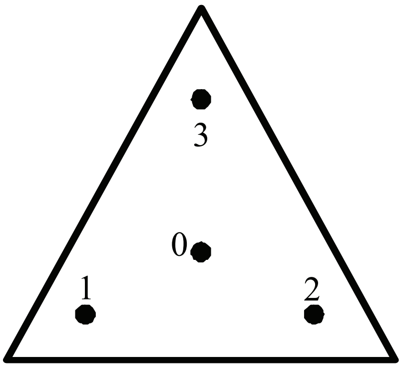

Рисунок 1 - Треугольный дискретный элемент третьего порядка

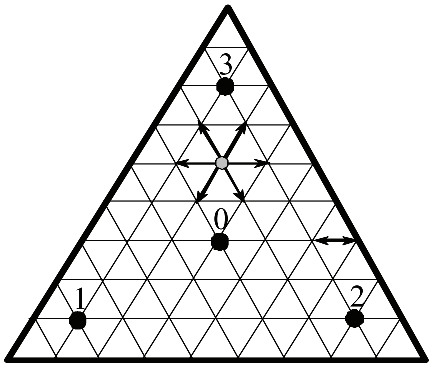

Рисунок 2 - Маршрутизация случайных блужданий

Сформулируем правила двумерных случайных блужданий в треугольном элементе с отражающими границами и поглощающими узлами. Точка старта выбирается случайным образом в одном из внутренних узлов решетки. Если этот узел не совпадает ни с одним из расчетных узлов кубатуры, то блуждающая частица имеет шесть маршрутов (рис. 2). При попадании частицы на границу области, она отражается от нее и возвращается в тот узел треугольной решетки, из которого вышла на границу. Частица поглощается только узлами интегрирования.

Компьютерные эксперименты для координат узлов (1) и (3) дали следующие результаты (табл. 1 и 2), количество выпущенных частиц – 1000000; количество отрезков, на которые разбивается каждая сторона треугольника – 30.

Таблица 1

Весовые коэффициенты для координат (1)

Координаты узла	Эксперимент	Точное значение
0(1/3,1/3,1/3)	0,229995	-27/48≈-0,5625
1(3/5,1/5,1/5)	0,256893	25/48≈0,52083333
2(1/5,3/5,1/5)	0,256955	25/48≈0,52083333
3(1/5,1/5,3/5)	0,256157	25/48≈0,52083333

Таблица 2 подтверждает физическое правдоподобие спектра кубатуры (4).

 ISSN 1562-9945

Таблица 2

Весовые коэффициенты для координат (3)

Координаты узла	Эксперимент	Точное значение
0(1/3,1/3,1/3)	0,296958	33/108≈0,30555556
1(11/15,2/15,2/15)	0,234313	25/108≈0,23148148
2(2/15,11/15,2/15)	0,234527	25/108≈0,23148148
3(2/15,2/15,11/15)	0,234202	25/108≈0,23148148

Естественно, что при статистическом моделировании получаем положительный спектр весов. Поэтому, полученные результаты дают альтернативную кубатуру для узлов (1). В связи с этим, представляет интерес сравнение «экспериментальной» кубатуры (ЭК) с кубатурой (2) на тестовых примерах.

Для тестирования были использованы следующие функции [9]:

$$f(x,y)=\sin\left(\pi\left(x^2+y^2\right)\right); \quad \text{(а)}$$

$$f(x,y)=\exp(yx); \quad \text{(б)}$$

$$f(x,y)=\frac{\exp[\sin(x)]\cos(x)}{y^2+1}. \quad \text{(в)}$$

Для функции а) характерно быстрое изменение градиентов по области конечного элемента, где КЭ – это правильный треугольник, вписанный в окружность единичного радиуса, центр тяжести которого совпадает с началом координат (рис. 3). Функции б) и в) в пределах области интегрирования имеют медленно изменяющиеся градиенты (рис. 4, 5).

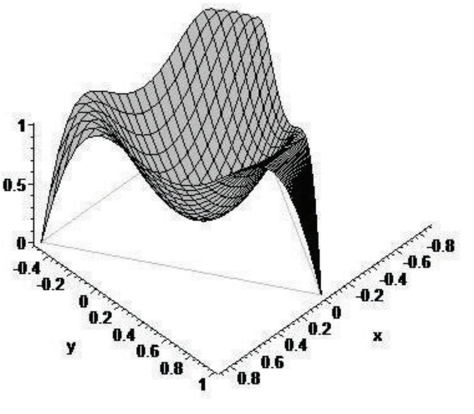

Рисунок 3 – График функции (а)

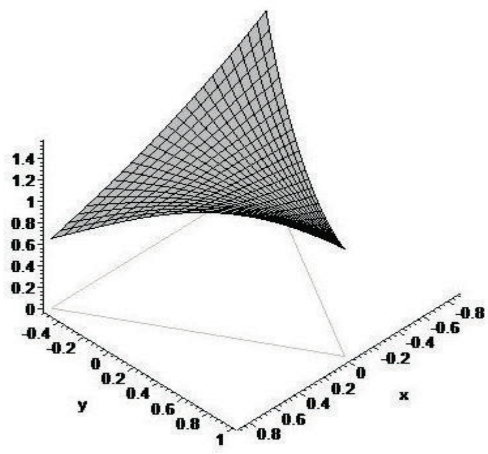

Рисунок 4 – График функции (б)

Результаты тестирования сравниваются с результатами, полученными при вычислении интегралов с помощью вычислительного процессора Maple (таблица 3).

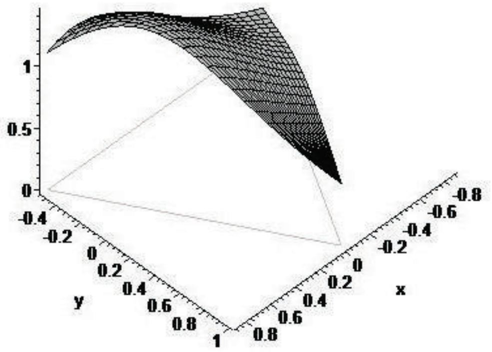

Рисунок 5 – График функции (в)

Таблица 3

Результаты тестирования ЭК и кубатуры (2)

Функция	Результат Maple	ЭК	Погрешность	Кубатура (2)	Погрешность
(а)	0,7344	0,4807	34,54	0,9780	33,19
(б)	1,307	1,301	0,46	1,302	0,38
(в)	1,158	1,224	5,69	1,148	0,86

Выводы. Экспериментальные спектры весовых коэффициентов для узлов (1) были получены, используя тот же алгоритм, что и для узлов (3). Однако, «экспериментально» полученная кубатура с казалось бы физически правдоподобным спектром весов «дает» худший результат. Таким образом, несмотря на отрицательный вес, кубатура (2) предпочтительнее для вычисления интегралов. Предостережения, которые существуют в литературе [1,2], не всегда оправданы. Представляет интерес рассмотрение кубатур Гаусса – Лежандра на трехмерных элементах и элементах других конфигураций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.– М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
5. Хомченко А.Н., Лурье И.А., Корниловская Н.В., Цыбуленко О.В. Об оценках кратных интегралов по Гауссу//Геометричне та

 ISSN 1562-9945

комп'ютерне моделювання. –Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 10.– С. 51-55.
6. Хомченко А., Зуб П., Цибуленко О. Геометрія випадкових блукань у центорованих дискретних елементах // Сучасні проблеми геометричного моделювання: Матеріали Міжнародної науково – практичної конференції.– Львів: НУ «Львівська політехніка», 2003. – С. 104 – 106.
7. Хомченко А.Н., Тулученко Г.Я. Стохастичні моделі для комп'ютерної діагностики вагових спектрів кубатур // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2004. – Вип. 3, № 629. – С. 33 – 38.
8. Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н. Моделі випадкових блукань на трикутних скінченних елементах вищих порядків // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – Вип. 4. - Том 28. – С. 32 – 36.
9. Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н. Обчислювальні експерименти з ваговими коефіцієнтами кубатур на скінченних елементах вищих порядків // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 11. – С. 37-43.

Получено 15.03.2006 г.

УДК 515.2, 681.3

А.В. Черников

ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ФОРМООБРАЗОВАНИЙ

Постановка проблемы. Вопросы исследования технологических процессов в промышленности (например, добыча нефти и газа, фильтрование), природных процессов и явлений (в частности, эрозии почв, наступления пустынь) и т.д. часто требуют проведения виртуального эксперимента с построением компьютерных моделей изменения объектов во времени под действием внешних сил. Для использования всех возможностей компьютерной техники необходима разработка соответствующих геометрических моделей объектов, процессов и явлений.