

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – Мир, 1976. – 464 с.
3. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. - 216с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. -392с.
5. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. - 160 с.
6. Хомченко А.Н. Способ построения интерполяционных формул на конечных элементах // Сопротивление материалов и расчет сооружений. - К.: КИСИ, 1985.-Вып.47.- С.67-70.
7. Хомченко А.Н. Вероятностные схемы в дискретном анализе температурных полей / Инж.-физич.журнал. - 1988.-Т.55. - №2. - С.323-324.
8. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Модели барицентрического усреднения и одношаговые схемы случайных блужданий//Матем.моделирование в образовании, науке и промышленности. - СПб.: МАН ВШ, 2005.-С.112-115.
9. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Об усреднении в математическом моделировании//Вестник Херс.национ.техн.ун-та. – Херсон:ХНТУ, 2005.-Вып. 22. - С. 340-343.

Получено 19.03.2006 г.

УДК 514.18:519.6

О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко

**АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ  
БАЗИСОВ**

**Постановка проблемы.** В наше время сотовые структуры все больше привлекают внимание исследователей. Гексагональные элементы можно встретить от молекулярных решеток фуллеренов до ячеек твело ядерных реакторов. Это вызвало немалый поток работ исследователей самых разных областей наук, посвященных геометрическому моделированию.

© О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко, 2006

В каталоге дискретных элементов (ДЭ) метода конечных элементов (МКЭ) шестиугольные ДЭ долгое время не значились вследствие отсутствия унитарного базиса. Классический интерполяционный полином на шестиугольном дискретном элементе с шестью узлами в вершинах содержит шесть параметров. Попытка построить такой полином как можно меньшей степени алгебраически не увенчалась успехом, т.к. матрица СЛАУ оказывается вырожденной. Считается, что причиной этого является избыточная симметрия правильного шестиугольника. Поэтому исследователи стали применять геометрические методы построения базиса, что привело к появлению дробно-рационального базиса гексагона [1]. Как известно, использование дробно-рационального базиса связано с некоторыми вычислительными трудностями, особенно при вычислении кратных интегралов в расчетах по МКЭ. Задача построения унитарного полиномиального базиса на гексагоне вплоть до 80-х годов прошлого столетия оставалась нерешенной. В [2] с помощью геометрического моделирования был построен первый полиномиальный гексагональный базис (ПБ). Несмотря на свою эффективность, этот базис имеет некоторые недостатки. Поэтому проблема построения оптимально удовлетворяющего всем интерполяционным условиям базиса гексагона остается открытой.

**Анализ предшествующих исследований.** В работе [1] с помощью суперпозиции четырех плоскостей, проходящих через гексагон, строится система функций, которые, однако, еще не отвечают всем качествам базиса. Попытка усовершенствования этих функций (нормировки) приводит их к дробно-рациональному виду. Существуют и другие схемы построения базиса гексагона с помощью геометрического моделирования. Например, в [3] построена система функций для гексагона, которая, однако, тоже обладает рядом недостатков. В [4] предложен синтез двух несовершенных систем функций (полиномиальных и дробно-рациональных). Полученный базис удовлетворяет интерполяционной гипотезе, но он дробно-рациональный.

Схему построения полиномиального базиса гексагона [2], немного видоизменив относительно первоначальной трактовки, можно сформулировать следующим образом: полиномиальная базисная функция для узла 1 гексагона, вписанного в окружность единичного радиуса, определяется как суперпозиция

- 1) «параболического конуса», проходящего через узлы 2, 4, 6 и точку (1;0;1) (рисунок 1а),
- 2) плоскости, проходящей через узлы 3, 5 и точку (1;0;1) (рисунок 1б).

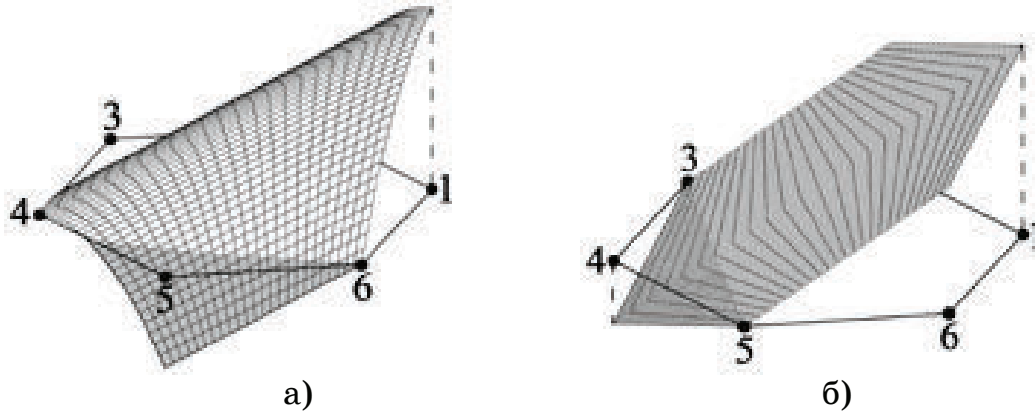
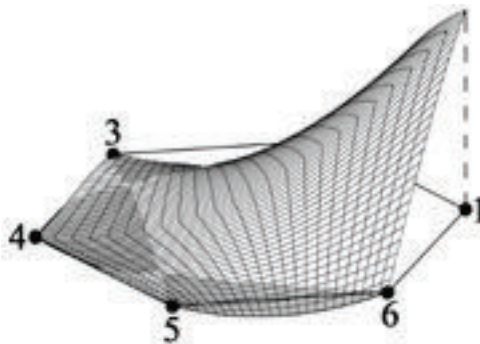


Рисунок 1 – Построение ПБ для гексагона

Тогда базисная функция для узла 1 имеет вид (рисунок 2):

$$N_1(x, y) = \frac{1}{6}(x - 2y^2 + 1)(2x + 1). \quad (1)$$

Рисунок 2 – Полиномиальная базисная функция для узла 1  $N_1(x, y)$ 

Остальные базисные функции можно найти из  $N_1$  последовательным поворотом на угол  $60^\circ$ . Такой ПБ удовлетворяет интерполяционным условиям. Однако на сторонах гексагона функции  $N_i$  не являются линейными, тогда как при заданном распределении узлов ДЭ вдоль каждой стороны должны быть линейными. Хотя, это не мешало такому базису давать более точные результаты, чем дробно-рациональные базисы [5].

**Постановка задачи.** Задача состоит в том, чтобы найти оптимальный по своим свойствам полиномиальный гармонический базис

гексагона, который отвечал бы всем интерполяционным условиям и давал бы наиболее точные результаты.

**Основная часть.** Рассмотрим следующий шестипараметрический полином

$$P_i(x, y) = \alpha_1^i + \alpha_2^i x + \alpha_3^i y + \alpha_4^i x^2 + \alpha_5^i x^3 + \alpha_6^i y^2, \quad (i = \overline{1,6}). \quad (2)$$

Положим  $\alpha_1 = \frac{1}{6}$ . Тогда из интерполяционных условий

$$P_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = \overline{1,6}), \quad (3)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,

$$\sum_{i=1}^6 P_i(x, y) = 1 \quad (4)$$

для узла 1 получим следующую базисную функцию:

$$f_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}x^3. \quad (5)$$

Остальные базисные функции можно найти из  $f_1$  последовательным поворотом на угол  $60^\circ$ . Несмотря на то, что выполняются интерполяционные условия, функция (5) оказалась хуже функции (1) – она обладает тем же недостатком нелинейности на сторонах гексагона и притом гораздо сильнее осциллирует по области ДЭ.

Воспользовавшись приемом взвешенного усреднения [4], сложив базисы (1) и (5) с весовыми коэффициентами  $3/4$  и  $1/4$  получим новый базис. Например, для узла 1 (рисунок 3):

$$P_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{6}x^3. \quad (6)$$

Для этого базиса выполняются условия (3), (4). И хотя он снова таки нелинеен вдоль сторон гексагона, лапласианы каждой базисной функции равны нулю, чего нельзя сказать про базис (1). Это свойство дает гарантию гармоничности (по Лапласу) восстанавливаемой функции на гексагоне [5].

В работе [6] предложен качественно новый подход к построению полиномиального базиса для шестиузлового гексагонального ДЭ. С помощью вероятностно-геометрического моделирования строится полиномиальный базис степени выше чем (2), в котором исключены нечетные степени  $y$ . Коэффициенты такого базиса находятся с наперед заданной степенью точности. Например, для узла 1 базисная функция

имеет следующий вид (рисунок 4):

$$K_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + 0,26535142x^2 - 0,26535142y^2 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3 - 0,37646253x^2y^2 + 0,06798191x^4 + 0,05750560y^4. \quad (7)$$

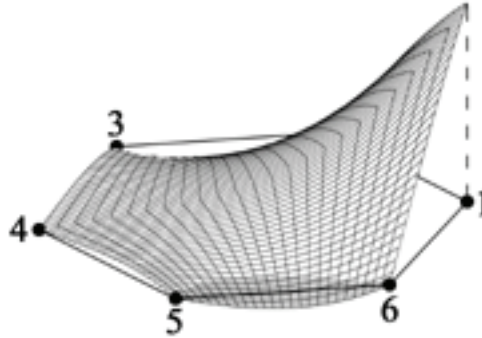


Рисунок 3 – Полиномиальная базисная функция для узла 1  $P_1(x, y)$

Такой базис не отвечает условиям (3), (4), но невязки достаточно малы, и для практических расчетов ими можно пренебречь. Лапласианы каждой базисной функции не равны нулю, хотя в сумме компенсируются и полностью «гасят» друг друга.

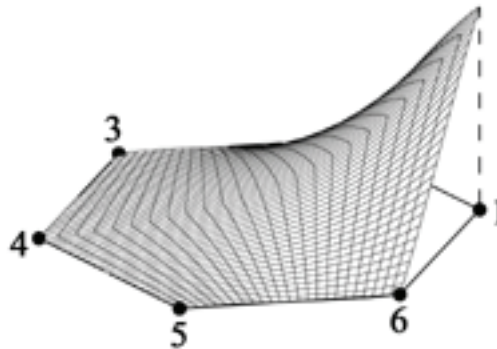


Рисунок 4 – Полиномиальная базисная функция для узла 1  $K_1(x, y)$

Достоинством полиномиального базиса (7), отличающим его от предыдущих базисов, является гладкость в области ДЭ и сохранение линейности вдоль границы гексагона. Таким образом, базис (7) тоже пригоден для расчетов. Предложенные базисы были протестированы на задаче восстановления стационарного температурного поля в пределах области гексагонального ДЭ, вписанного в окружность единичного радиуса, при заданных температурах в вершинах:  $T_1 = 10^0$ ;  $T_2 = 20^0$ ;  $T_3 = 30^0$ ;  $T_4 = 40^0$ ;  $T_5 = 50^0$ ;  $T_6 = 60^0$ . Решение устанавливалось методом барицентрического усреднения (МБУ) [5].

Выберем вершину 1 гексагонального ДЭ в точке (1;0), остальная нумерация – против часовой стрелки. Результаты расчетов по МБУ с использованием базисов (1), (6), (7) сравниваются со значениями, полученными методом сеток (итерациями Либмана) и многошаговыми блужданиями метода Монте-Карло (табл. 1).

Таблица 1

Температуры в контрольных точках гексагонального ДЭ

точка ( $x_i, y_i$ )	Значение в точке ( $x_i, y_i$ )				
	По методу сеток	По методу Монте-Карло	По МБУ с использованием базиса		
			(1)	(6)	(7)
(0;0)	35	35,133	35	35	35
$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$	27,325	27,401	25	26,875	27,257
$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	22,537	22,781	18,333	21,667	22,538

Рассмотрим задачу с теми же параметрами, но при условии теплоизоляции вдоль части границы, захватывающей узлы 1 и 6. Расчетные формулы МБУ приведены в [7]. В алгоритме расчета по методу Монте-Карло для теплоизолированной границы предусматривается идеальное отражение блуждающей частицы.

Таблица 2

Температуры в контрольных точках гексагонального ДЭ с теплоизолированной частью границы

точка ( $x_i, y_i$ )	Значение в точке ( $x_i, y_i$ )			
	По методу Монте-Карло	По МБУ с использованием базиса		
		(1)	(6)	(7)
(0;0)	35,058	35	35	35
$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$	33,684	24,444	30	29,833
$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	36,971	39,355	38,571	38,437

**Выводы.** Проведенные расчеты для задач восстановления потенциальных полей на гексагональном ДЭ (с заданными значениями в вершинах) показывают, что, несмотря на существенные недостатки, именно полиномиальный базис (7) выигрывает в конкуренции с дру-

гими полиномиальными базисами. Более того, многочисленное тестирование показало, что он дает погрешности практически такие же, как и дробно-рациональные базисы, а это является еще одним плюсом в его сторону. Хотя необходимо отметить, базис (7) эффективен для задач с несимметричными граничными условиями. В то время как для задач с определенной симметрией заданных условий неизменно лидирует первый полиномиальный базис (1) [5]. Для задач с теплоизоляцией на границе гексагонального ДЭ независимо от граничных условий базис (7) (как и дробно-рациональные базисы [7]) дает лучшую аппроксимацию, чем базис (1).

Таким образом, наличие каталога базисов для гексагонального ДЭ позволяет исследователю варьировать инструментарием для поиска наиболее точного решения при тех или иных параметрах задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied in the Galerkin – type finite element method // J. Inf. Process. 1984. – V. 7, № 2. – P. 89 – 95.
2. Хомченко А.Н. Об одном проекционно–сеточном алгоритме вычислительной механики // VI Всесоюз. съезд по теоретич. и прикладн. механике: Аннотации докладов – Ташкент, 1986. – С. 628 – 629.
3. Wachspress E.L. A rational finite element basis.– Academic Press. – N.- Y., 1975. – 216 p.
4. Хомченко А.Н. Синтетична модель гексагонального скінченного елемента // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип.4, Том 20. – С. 9 -13.
5. Хомченко А.Н., Цыбуленко О.В., Дембровская М.В. Барицентрические оценки электростатического поля в круге // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы". - 2003. - № 1 (11). – С. 35-40.
6. Хомченко А.Н., Моисеенко С.В., Николаенко Ю.И. Управляющие параметры и моделирование гармонического базиса гексагона // Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції „Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем” (MPZIS’2005). – Дніпропетровськ: ДНУ, 2005. – С. 183-184.
7. Цыбуленко О.В., Лур'є І.А. Комп'ютерні оцінки стаціонарної температури шестикутної пластини // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. - Вип.4, Т.20.- С.90-94.

Получено 12.03.2006 г.