ЛІТЕРАТУРА

1. Подгорный А.Л. К вопросу автоматизации инсоляционных расчетов // Прикладная геометрия и инженерная графика.– 1981.-Вып.31.– С.12–13.
2. Куценко Л.М. Визначення поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів // Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Том. 24. - Мелітополь: ТДАТА,. - 2004 - С. 15 – 21.
3. Куценко Л.М. Метод опису геометричної форми відбивача у випадку рухомого джерела променів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. Вип. 6. - С. 3 - 8.
4. Куценко Л.М. Визначення поверхні нерухомого відбивача, здатного зосередити відбиті промені в заданій точці простору. - Сборник научных трудов КНУТД. - Киев: Випол, 2004. - С.28-38.

Получено 12.03.2006 г.

УДК 515.2:517.2

А.Н.Хомченко, С.В.Моисеенко

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСА ЛИНЕЙНОЙ 3D– ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Постановка проблемы. Проблема трехмерной интерполяции является ключевой для методов дискретных элементов. В связи с развитием ЭВМ и появлением современных методов численного решения краевых задач возникла интересная методологическая проблема установления и изучения взаимосвязи между различными методами алгебраизации (аппроксимации). По мнению Зенкевича и Моргана [1] все процессы аппроксимации решений дифференциальных уравнений по существу составляют единое целое. В последние годы все большее число специалистов приходит к пониманию этого факта. В настоящей работе предпринята попытка найти характерные черты, объединяющие в единое семейство МКР, МКЭ, МГЭ и метод Монте-Карло. Установлено, что все эти методы фактически используют принцип барицентричекого усреднения узловых параметров в фиксированном или текущем барицентре системы "материальных" узлов. Включение в общее семейство метода Монте-Карло стало возможным благодаря установлению вероятностных свойств базиса трехмерного симплекса.

Анализ предшествующих публикаций и постановка задачи. Симплексом в трехмерном пространстве называют тетраэдр с 4-мя узлами в вершинах [2, 3, 4]. Симплексные модели связаны с использованием линейных интерполяционных функций в элементе: в двумерных задачах на треугольнике (3 узла), в одномерных – на отрезке прямой (2 узла). Эти модели одними из первых нашли применение в МКЭ [2]. Их использовали Тэрнер, Клаф, Мартин и Топп (1956 г.), Синг (1957г.), Галлагер, Пєдлог и Бейлард (1962г.). Свойства симплексных аппроксимаций исследовали Висманн (1963г.), Оден (1967, 1969г.), Фелиппа (1966г.) и другие. Базисные функции линейной интерполяции на симплексе иногда называют барицентрическими координатами симплекса [2]. Эти координаты, предложенные Мёбиусом в 1827г., долгое время применялись преимущественно в задачах геометрического содержания. В последние годы круг полезных приложений барицентрических координат заметно расширился [5]. Впервые удалось установить вероятностный смысл барицентрических координат и вероятностное содержание самой процедуры интерполяции на симплексе [6]. Основная задача работы состоит в установлении связей линейной интерполяции на симплексе с монте-карловской оценкой функции в текущей точке элемента. Кроме того, в работе приводится аналитическое доказательство новых вероятностных свойств базиса, обнаруженных в экспериментах со случайными блужданиями.

Основная часть. Полином линейной интерполяции на тетраэдре имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \qquad (1)$$

Расчетные узлы расположены в вершинах тетраэдра A_i (рис.1), число параметров в (1) соответствует числу вершин.

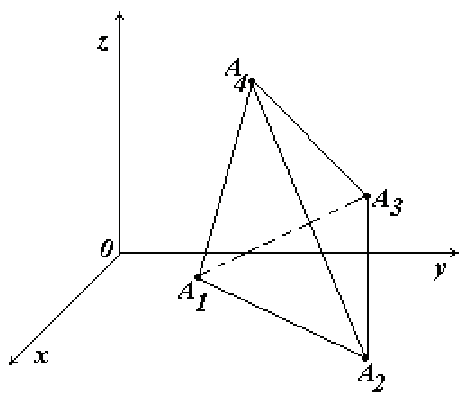

Рисунок 1 - Трехмерный симплекс

Построение интерполяционного полинома (1) сводится к определению параметров $\alpha_i \ (i=\overline{1,4})$. Традиционный подход предусматривает составление на основе (1) и решение СЛАУ четвертого порядка. Мы попытаемся построить линейный интерполяционный полином на основе вероятностных представлений. Выберем внутри тетраэдра произвольную точку М (x, y, z). Очень важно подчеркнуть, что точка М выбирается случайно в полном соответствии с законом равномерного распределения, плотность которого постоянна и равна Δ^{-1}, где Δ - объём тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Соединим точку М отрезками прямых с вершинами A_i. При этом внутри основного тетраэдра образуется четыре тетраэдра с общей вершиной М. Случайные перемещения вершины М приводят к перераспределению объёмов составляющих тетраэдров. Иными словами, объём отдельного тетраэдра, ассоциированного с вершиной A_i, является случайной величиной. Отношение объема Δ_i к общему объёму Δ определяет вклад узлового значения φ_i в значение полинома $\varphi(x,y,z)$ в точке М. Для функции случайной точки мы можем составить дискретный закон распределения вероятностей в виде следующей таблицы:

Ф	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
P_i	P_1	P_2	P_3	P_4

Как видим, мы пришли к задаче Мёбиуса о тетраэдре со смещённым барицентром. Мёбиус пришел к барицентрическим координатам в поисках ответа на вопрос: как распределить единичную массу по вершинам тетраэдра $A_i \ (i=\overline{1,4})$, чтобы барицентр системы материальных точек A_i оказался в произвольно выбранной точке М? Таким образом, вероятности P_i из приведенной выше таблицы и барицентрические координаты совпадают и могут быть определены геометрически через отношения объёмов. Например,

$$P_1 = \xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ где } \Delta = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

Δ - объём тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$; Δ_1 - объём тетраэдра $MA_2A_3A_4$. Остальные функции $\xi_i(i=2,3,4)$ имеют вид: $\xi_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где определитель Δ_i

образуется из Δ заменой второго, третьего и четвертого элементов i – ой строки координатами текущей точки M. Теперь, чтобы построить линейную интерполяцию, достаточно вычислить математическое ожидание функции случайной точки (см. таблицу):

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i(x,y,z) \cdot \varphi_i \, . \tag{2}$$

Заметим, что функции $\xi_i(x,y,z)$ по определению линейны, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа. В одношаговых схемах случайных блужданий ξ_i играют роль переходных вероятностей, а симплекс стал удобным вычислительным шаблоном для решения уравнения Лапласа с условиями Дирихле на границе произвольной формы [7].

В терминах метода Монте-Карло выражение (2) называют средним вознаграждением за выход блуждающей частицы в вершину симплекса. Многочисленные эксперименты со случайными блужданиями (на мелких сетках с тетраэдральными ячейками) подтвердили правильность замены апостериорных переходных вероятностей $\frac{n_i}{n}$ априорными ξ_i. Такая замена существенно ускоряет получение монте-карловской оценки. Схема блужданий со случайным стартом превращается в конечно-разностную вычислительную схему, если все грани тетраэдра равны, а точка M зафиксирована в естественном барицентре. Теперь становится вполне очевидной связь между различными методами восстановления гармонической функции по четырем известным значениям в вершинах симплекса. Об этом и других применениях принципа барицентрического усреднения можно прочитать в [8, 9].

Эксперименты с многократными и многошаговыми зигзагоподобными блужданиями позволили обнаружить новое свойство переходных вероятностей. Ниже приводится аналитическое доказательство этого свойства. Мы рассматриваем случайную выборку из тетраэдров с общим барицентром M_0, которые вложены в основной тетраэдр (рис.1). Тетраэдр называется вложенным в основной тетраэдр, если его вершины находятся внутри (возможно, на границе) основного тетраэдра. Случайный характер выборки обусловлен произвольным поворотом вложенного тетраэдра около барицентра M_0, равномерным растяжение или сжатием к барицентру вложенного тетраэдра. Вершины вложенного тетраэдра обозначим через *k, l, m, n*.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Математическое ожидание переходной вероятности из вершины вложенного тетраэдра в вершину основного тетраэдра равно вероятности перехода из барицентра вложенного тетраэдра в указанную вершину основного тетраэдра.

Доказательство. Напомним, что вероятность случайного перехода из внутренней точки "*k*" основного тетраэдра в его вершину "*i*" определяется значением базисной функции $\xi_i(k) = \xi_i(x_k, y_k, z_k)$. Вычислим непосредственно среднее значение (математическое ожидание) переходных вероятностей по четырем маршрутам, проложенным из вершин *k, l, m, n* вложенного тетраэдра в вершину 1 основного тетраэдра

$$\overline{P_1} = \frac{0,25}{\Delta}(\Delta_k + \Delta_l + \Delta_m + \Delta_n) = \frac{0,25}{\Delta}\begin{vmatrix} 4 & x_k + x_l + x_m + x_n & y_k + y_l + y_m + y_n & z_k + z_l + z_m + z_n \\ 4 & 4x_2 & 4y_2 & 4z_2 \\ 4 & 4x_3 & 4y_3 & 4z_3 \\ 4 & 4x_4 & 4y_4 & 4z_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta_0}{\Delta} = \xi_1(M_0),$$

где $x_0 = \dfrac{x_k + x_l + x_m + x_n}{4}$, $y_0 = \dfrac{y_k + y_l + y_m + y_n}{4}$, $z_0 = \dfrac{z_k + z_l + z_m + z_n}{4}$ - координаты барицентра вложенного тетраэдра. Аналогично, $\overline{P_2} = \xi_2(M_0)$; $\overline{P_3} = \xi_3(M_0)$; $\overline{P_4} = \xi_4(M_0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Математическое ожидание расстояния от вершины вложенного тетраэдра до какой-либо грани основного тетраэдра равно расстоянию от этой же грани основного тетраэдра до барицентра вложенного тетраэдра.

Выводы. Наиболее содержательной процедурой алгебраизации является аппроксимация базисными функциями. На симплексах это барицентрические координаты. Модель случайных блужданий по симплексам, использующая барицентрические координаты в качестве переходных вероятностей, прямо указывает на связь других методов дискретизации с методом Монте-Карло. Задача Дирихле для уравнения Лапласа – лучший пример существования такой связи. Ассоциация математического ожидания с барицентром является результатом удачного сочетания вероятностных подходов и механических аналогий. Образно говоря, барицентр – это хранитель усредненной информации о своем окружении.

 ISSN 1562-9945

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – Мир, 1976. – 464 с.
3. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. - 216с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. -392с.
5. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. - 160 с.
6. Хомченко А.Н. Способ построения интерполяционных формул на конечных элементах // Сопротивление материалов и расчет сооружений. - К.: КИСИ, 1985.-Вып.47.- С.67-70.
7. Хомченко А.Н. Вероятностные схемы в дискретном анализе температурных полей / Инж.-физич.журнал. - 1988.-Т.55. - №2. - С.323-324.
8. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Модели барицентрического усреднения и одношаговые схемы случайных блужданий//Матем.моделирование в образовании, науке и промышленности. - СПб.: МАН ВШ, 2005.-С.112-115.
9. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Об усреднении в математическом моделировании//Вестник Херс.национ.техн.ун-та. – Херсон:ХНТУ, 2005.-Вып. 22. - С. 340-343.

Получено 19.03.2006 г.

УДК 514.18:519.6

О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ

Постановка проблемы. В наше время сотовые структуры все больше привлекают внимание исследователей. Гексагональные элементы можно встретить от молекулярных решеток фуллеренов до ячеек твелов ядерных реакторов. Это вызвало немалый поток работ исследователей самых разных областей наук, посвященных геометрическому моделированию.