

и проблемы антропосферы». – Тараз: ТарГУ, 2001 - № 2. - С. 160-165.

11. Разработка программной реализации геометрического способа моделирования трехфакторного технологического процесса // Вестник НАН РК. – 2004. - № 3.
12. Графоаналитический способ определения бетонной смеси по критерию прочности // Современные проблемы геометрического моделирования. Материалы Україно-російської науково-практичної конференції. - Харків: МОН України, 2005.

Получено 19.03.2006 г.

УДК 519.2

Г.Я.Тулученко, А.Н. Хомченко, І.О. Астіоненко

ЙМОВІРНІСНІ ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ СИМПЛЕКСІВ РІЗНИХ ВИМІРНОСТЕЙ

Постановка проблеми. Алгоритми рандомізованих обчислень знаходять широке застосування при розв'язанні задач з різних наукових галузей. Використання ймовірнісних підходів у методі скінченних елементів дозволяє, зокрема, будувати базисні функції скінченних елементів, уникаючи побудови і розв'язання системи лінійних рівнянь на відміну від традиційного підходу [1].

Базисні функції симплекс-елементів є гармонічними функціями. А для гармонічних функцій добре відомі монте-карлівські алгоритми їх відновлення [2]. Використання в якості області випадкових блукань симплекс-елементів дозволяє встановити нові ймовірнісні властивості базисних функцій цих скінченних елементів.

Аналіз попередніх публікацій. В роботі [3] була сформульована гіпотеза про можливість використання локальних координат точки старту частинки, яка блукає по двовимірному або тривимірному симплексу, в якості ймовірностей її переходу у вершини симплексу в однокроковій схемі блукань. Припущення ґрунтувалося на результатах обчислювальних експериментів. А в роботі [4] ця гіпотеза доведена аналітично. Властивості випадкових блукань з одним стартом в k -вимірному симплексі досліджені в статті [5].

Цілі статті (постановка задачі). На основі ймовірнісних властивостей базисних функцій симплексів різних вимірностей встановити характеристики одночасних випадкових блукань системи n частинок по цим скінченним елементам.

© Г.Я.Тулученко, А.Н. Хомченко, І.О. Астіоненко, 2006

Основна частина. Спочатку розглянемо випадкові блукання по двовимірному симплексу $U_1U_2U_3$ з поглинаючими вузлами у вершинах. У локальній системі координат $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ базисні функції цього скінченного елемента мають вигляд [6]:

$$N_i = \xi_i, \quad i = \overline{1;3}.$$

В роботі [4] доведено, що ймовірність поглинання блукаючої частинки з стартом в точці $M(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ вузлом симплексу U_i не залежить від траєкторії блукань і повністю визначається значенням базисної функції N_i , що зв'язана з вузлом U_i , в точці старту:

$$P(M(\xi_1; \xi_2; \xi_3) \rightarrow U_i) = N_i(M) = \xi_i, \quad i = \overline{1;3}.$$

Ця ймовірнісна властивість базисних функцій симплексу дозволяє встановити нові характеристики одночасних блукань множини частинок.

Твердження 1. Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини n точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у симплекс, у вершину цього симплексу дорівнює ймовірності переходу з барицентра множини вкинутих точок в ту ж вершину симплексу.

Доведення. Відомо [7], що локальні координати барицентра $M_0(\xi_1^0; \xi_2^0; \xi_3^0)$ системи n точок визначаються за формулою:

$$\xi_i^0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l, \quad i = \overline{1;3}. \quad (1)$$

Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у симплекс, у вершину цього симплексу визначається так:

$$m_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P(M_l \rightarrow U_i) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n N_i(M_l) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l, \quad i = \overline{1;3}. \quad (2)$$

Співпадання правих частин формул (1) і (2) дозволяє зробити висновки, що шукане математичне сподівання дорівнює відповідній координаті барицентра системи вкинутих у симплекс точок:

$$m_i = \xi_i^0, \quad i = \overline{1;3}.$$

Наслідок. Отриманий результат дозволяє проводити різноманітні узагальнення задачі Бюффона, переходячи від кидання голки на площину до вкидання багатокутників у симплекс. В цьому випадку

вершини вкинутих у симплекс багатокутників розглядаються як точки старту одночасних блукань системи n частинок.

Твердження 2. Локальні координати барицентра системи n точок, вкинутих у симплекс, за ймовірністю збігаються до локальних координат барицентра симплексу $U_0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, якщо кількість точок системи необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l = \frac{1}{3}, \quad i = \overline{1; 3}.$$

Доведення. За законом великих чисел середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини за ймовірністю збігається до її математичного сподівання.

Щоб скористатися цим законом, будемо розглядати локальні координати точок старту ξ_i ($i = \overline{1; 3}$), як неперервні випадкові величини, що приймають значення з відрізка $[0; 1]$, і знайдемо їх математичні сподівання. Для цього спочатку відновимо інтегральну та диференціальну функції розподілу випадкових величин ξ_i . З геометричних міркувань ймовірність того, що координата ξ_i точки старту прийме значення менше, ніж ξ_i^* , за рис. 1 дорівнює відношенню площі трапеції $ABDE$ до площі симплексу ABC .

Трикутники ABC та DCE подібні, тому їх площі з врахуванням позначень, зроблених на рис. 1, відносяться як

$$\frac{S_{DDCE}}{S_{DABC}} = \frac{(1 - \xi_i)^2}{1}.$$

$$\text{Тоді } P(\xi_i < \xi_i^*) = \frac{S_{ABDE}}{S_{DABC}} = \frac{S_{DABC} - S_{DDCE}}{S_{DABC}} = 1 - \frac{S_{DDCE}}{S_{DABC}} = 1 - (1 - \xi_i)^2.$$

Отже, інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини ξ_i має вигляд:

$$F(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 1 - (1 - \xi_i)^2, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

а її диференціальна функція розподілу відповідно задається так:

$$f(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 2(1 - \xi_i), & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1. \\ 0, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини ξ_i дорівнює:

$$M(\xi_i) = \int_0^1 \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = 2 \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i) d\xi_i = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, середнє арифметичне спостережених значень ξ_i за ймовірністю збігається до відповідної координати барицентра симплексу, тобто $1/3$. Доведені твердження залишаються в силі при зростанні вимірності симплексів.

Твердження 3. Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини n точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у тривимірний симплекс (тетраедр), у вершину цього симплексу дорівнює ймовірності переходу з барицентра множини вкинутих точок в ту ж вершину симплексу.

Доведення. Доведення твердження 3 відрізняється від доведення твердження 1 зростанням проміжку зміни індексу i до $i = \overline{1; 4}$.

Твердження 4. Локальні координати барицентра системи n точок, вкинутих у тривимірний симплекс (тетраедр), за ймовірністю збігаються до локальних координат барицентра симплексу $U_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, якщо кількість точок системи необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l = \frac{1}{4}, \quad i = \overline{1; 4}.$$

Доведення. Алгоритм доведення залишається той самий, що і для твердження 2. Але у відповідності до зростання вимірності задачі геометрична ймовірність визначається через об'єми відповідних частин тетраедра.

Ймовірність того, що координата ξ_i точки старту прийме значення менше, ніж ξ_i^* , за рис. 3 дорівнює відношенню об'єму зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ до об'єму тетраедра $ABCD$.

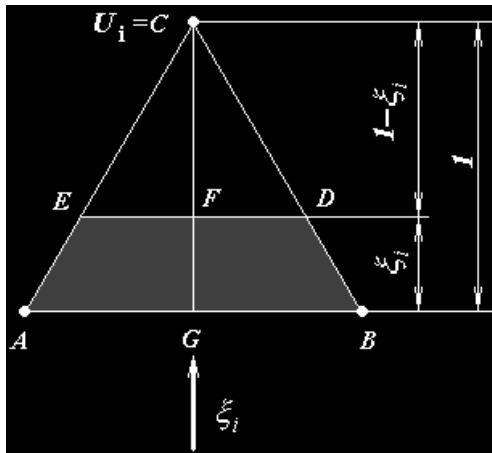


Рисунок 1 - Двовимірний симплекс

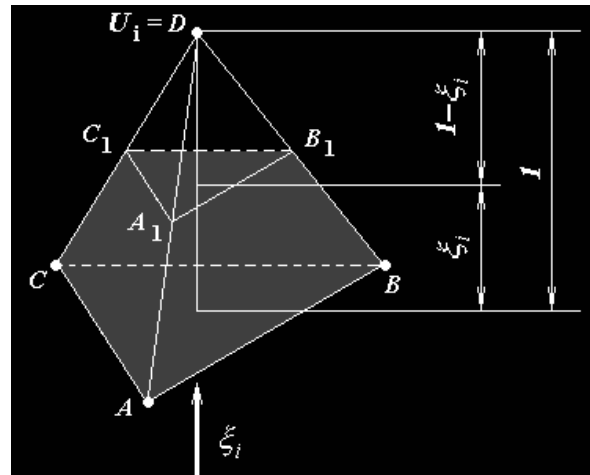


Рисунок 2 -Тривимірний симплекс

Тетраедри $A_1B_1C_1D$ та $ABCD$ подібні, тому їх об'єми з врахуванням позначень, зроблених на рис. 2, відносяться як

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D}}{V_{ABCD}} = \frac{(1 - \xi_i)^3}{1}.$$

Тоді

$$P(\xi_i < \xi_i^*) = \frac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{ABCD} - V_{A_1B_1C_1D}}{V_{ABCD}} = 1 - \frac{V_{A_1B_1C_1D}}{V_{ABCD}} = 1 - (1 - \xi_i)^3.$$

Звідси послідовно отримуємо, що

$$F(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 1 - (1 - \xi_i)^3, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$f(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 3(1 - \xi_i)^2, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$M(\xi_i) = \int_0^1 \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = 3 \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i)^2 d\xi_i = \frac{1}{4}.$$

У випадку k -вимірного симплексу твердження набувають такого вигляду.

Твердження 5. Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини n точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у k -вимірний симплекс, у вершину цього

симплексу дорівнює ймовірності переходу з барицентра множини вкинутих точок в ту ж вершину симплексу.

Доведення. Доведення твердження 5 відрізняється від доведення твердження 1 зростанням проміжку зміни індексу i до $i = \overline{1; k+1}$.

Твердження 6. Локальні координати барицентра системи n точок, вкинутих у k -вимірний симплекс, за ймовірністю збігаються до локальних координат барицентра симплексу $U_0\left(\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k+1}; \dots; \frac{1}{k+1}\right)$, якщо кількість точок системи необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l = \frac{1}{k+1}, \quad i = \overline{1; k+1}.$$

Доведення. Геометрична ймовірність, яка дозволяє відновити закон випадкової величини ξ_i , визначається в цьому випадку через міри відповідних частин k -вимірного симплексу, що приводить до наступних результатів:

$$F(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 1 - (1 - \xi_i)^k, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$f(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ k(1 - \xi_i)^{k-1}, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$M(\xi_i) = \int_0^1 \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = k \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i)^{k-1} d\xi_i = \frac{1}{k+1}.$$

Висновки. Встановлені властивості дозволяють будувати економічні схеми одночасних випадкових блукань по k -вимірним симплексам. Вони можуть дозволити, зокрема, зменшити обсяги обчислень значень підінтегральної функції при наближеному інтегруванні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Цибуленко О.В. Геометричні моделі процедур барицентричного усереднення: Дис...канд. техн. наук: 05.01.01. –Херсон, 2004.– 166 с.
2. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.

3. Хомченко Б.А. Ймовірнісні моделі та алгоритми зваженого усереднення параметрів в інформаційних технологіях відновлення функцій: Дис...канд. техн. наук: 05.13.06. – Херсон, 2000. – 204 с.
4. Валько Н.В. Ймовірнісні моделі і методи барицентричного усереднення граничних потенціалів: Дис...канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Дніпропетровськ, 2005. – 170 с.
5. Хомченко А.Н. Некоторые обобщения моделей бернуллиевых блужданий в K -мерном симплексе // Труды Института прикладной математики и механики. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2001. – Т.6. – С. 159-163.
6. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
7. Балк М.Б. Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.

Получено 15.03.2006 г.

УДК 515.2

Л.В.Ушаков

ПРОЕКТУВАННЯ ПОВЕРХНІ ВІДБИВАЧА ОСВІТЛЮВАЛЬНОГО ПРИЛАДУ ЩІЛИННОГО ТИПУ

Постановка проблеми. В нічний час під час проведення аварійно-рятувальних робіт виникає проблема надійного освітлення великих за розмірами місцевостей. На практиці використовуються освітлювальні прилади, поверхні відбивачів яких спроектовано на основі параболічних залежностей, і які формують пучок променів у межах „світлового конуса”. Для освітлення великих площ місцевостей такі прилади необхідно періодично рухати (тобто сканувати місцевість), що додає додаткові вимоги до конструкцій їх кріплень. Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на пошук форми нерухомого відбивача, здатного зосередити відбиті промені в просторі, відмінному за „світловий конус”, наприклад, щілинної конструкції.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Основу геометричного моделювання відбивачів променів методами синтетичної геометрії складають роботи професора О.Л.Підгорного [1]. Для складання комп'ютерних алгоритмів розрахунку відбивачів освітлювальних приладів більш зручним буде аналітичний опис відбивальної поверхні [2].

© Л.В.Ушаков, 2006