УДК 538...539

Ю.М. Терентьев

ВЫРОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ФЛОКЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Постановка проблемы. Теория распространения электромагнитных волн в пространственно – периодических структурах [1] является результатом анализа задач дифракции рентгеновского излучения на атомной структуре кристаллов [2], исследования распространения света в многослойных оптических покрытиях [3] и диэлектрических кристаллах [4], разработки и конструирования периодических структур для микроволновой электроники и ускорительной техники [5,6] . В последнее десятилетие теория распространения электромагнитных волн в пространственно – периодической среде в значительной мере развивается в связи с физикой фотонных кристаллов – диэлектрических кристаллов, в которых средствами полупроводниковой технологии создается периодическая пространственная модуляция диэлектрической проницаемости [7].

Общность математического аппарата связывает проблему распространения волн в пространственно – периодической среде с квантово-механической задачей Блоха о движении в пространственно – периодическом потенциале. Физическим аналогом запрещенной энергетической зоны в теории распространения электромагнитных волн является частотная полоса непропускания волн, обусловленная их селективным отражением[8]. Прямым аналогом фотонных кристаллов здесь являются полупроводниковые сверхрешетки, в которых искусственно созданная периодическая структура используется для управления спектром носителей и явлениями переноса в полупроводниках [9]. С другой стороны, непропускание волн можно интерпретировать как развитие в системе неустойчивости параметрического типа, что определяет общность теории распространения волн с теорией колебаний[10]. Полосам непропускания в пространственно – периодических структурах соответствуют области параметрической неустойчивости и явление параметрического резонанса. Исследование параметрической неустойчивости, как метод анализа нелинейных колебаний вблизи стационарного состояния [11], соединяет теорию параметрических систем с задачами нелинейной физики [12].

 ISSN 1562-9945

Разнообразие методов анализа, применяемых для исследования и расчета параметрических систем, вследствие не вполне выясненной области их применимости и степени точности, обращает внимание на модельные эталонные задачи, где аналитические и достаточно прозрачные численные методы позволяют проанализировать физику развития неустойчивости. С другой стороны, такие модельные задачи могут быть использованы для апробации методов, предназначенных для исследования сложных случаев, где аналитические возможности заведомо ограничены.

Анализ известных результатов и постановка задачи. Общепринятыми модельными задачами при анализе параметрической неустойчивости являются исследование неустойчивости решений дифференциального уравнения второго порядка Матье [13] и, с другой стороны, неустойчивости волн, в слоистой периодической среде [1, 3]. Для уравнения Матье имеется достаточно полный анализ областей неустойчивости и периодических решения на границах областей. Для второй из эталонных моделей в случае прозрачной двухслойной среды возникает сравнительно простая расчетная схема, известная как модель Мейснера, позволяющая в аналитическом виде получить характеристическое уравнение для анализа спектра волн. В квантовомеханических задачах этот подход известен как модель Кронига – Пенни, а в теории колебаний соответствует импульсной накачке параметрической системы.

Цели исследования. В настоящей работе для модели Мейснера впервые анализируется следствия центральной симметрии и исследуется вырождение решений задачи Флоке, приводятся характеристические уравнения для границ областей селективного отражения.

Основной материал исследования. В задаче о распространении поперечных электромагнитных волн в пространственно периодической среде уравнения Максвелла приводят к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\begin{gathered}\frac{d^2E}{dx^2} + k^2 \cdot \varepsilon\ (x) \cdot E = 0 \\ \varepsilon\ (x + L) = \varepsilon\ (x)\end{gathered} \tag{1}$$

Для прозрачной двухслойной периодической среды, где чередующиеся слои: $\ldots,a,b,a,b,a,b\ldots$ отличаются величиной показателя преломления $n_a = n_1 \neq n_u = n_2$ предполагаем, что решение в каждом из двух слоев является суперпозицией двух решений для однородной среды, и получаем общепринятый вид матрицы перехода

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \dfrac{n_2}{n_1} \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 & \dfrac{\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}{n_1} + \dfrac{\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1}{n_2} \\ -n_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - n_2 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 & \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \dfrac{n_1}{n_2} \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

выраженной через волновое число, показатель преломления и размер каждого из слоев, $\varphi_m = k \cdot l_m \cdot \mathrm{n_m} \quad m = 1,2$

След матрицы на двухслойной ячейке имеет известный вид:

$$Sp\,\mathbf{R} = 2 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \quad (3)$$

Областям селективного отражения (неустойчивости) электромагнитных волн соответствуют частоты, при которых:

$$|Sp\,\mathbf{R}| > 2\,. \quad (4)$$

При чётных и нечетных периодических решениях на границе областей неустойчивости имеют место соотношения $Sp\,\mathbf{R} = 2$, $Sp\,\mathbf{R} = -2$. Преобразуя углы набега фазы в слоях, для границ областей неустойчивости, соответствующих четным решениям, получаем:

$$-4 \cdot \frac{\left(\sqrt{\dfrac{n_1}{\mathrm{n_2}}} \cdot \tan\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right) + \sqrt{\dfrac{n_2}{\mathrm{n_1}}} \cdot \tan\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right)\right) \cdot \left(\sqrt{\dfrac{n_2}{\mathrm{n_1}}} \cdot \tan\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right) + \sqrt{\dfrac{n_1}{\mathrm{n_2}}} \cdot \tan\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right)\right)}{\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)\right) \cdot \left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right)\right)} = 0, \quad (5)$$

а для границ, соответствующих нечетным решениям,

$$4 \cdot \frac{\left(\dfrac{n_1}{\mathrm{n_2}} - \tan\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \tan\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)\right) \cdot \left(\dfrac{n_2}{\mathrm{n_1}} - \tan\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \tan\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)\right)}{\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)\right) \cdot \left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right)\right)} = 0 \quad (6)$$

Приведенные соотношения приводят к использованию матрицы перехода, связывающей компоненты решения в центре симметрии, т.е. в центре каждого из двух слоев, и представления её в одной из следующих форм:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad ; \quad \mathbf{R}'' = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1\,, \quad (7)$$

 ISSN 1562-9945

где

$$\mathbf{r}_1=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-\frac{n_2}{n_1}\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) & \frac{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{n_1}+\frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{n_2} \\ -n_1\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-n_2\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \mathbf{(8)}$$

и, соответственно,

$$\mathbf{r}_2=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) & \frac{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{n_1}+\frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{n_2} \\ -n_1\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-n_2\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-\frac{n_2}{n_1}\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \mathbf{(9)}$$

Перемножение матриц приводит к формулам для недиагональных,

$$\mathbf{R}'_{12}=\left[2\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{n_1}+\frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{n_2}\right) \quad \mathbf{(10)}$$

$$\mathbf{R}'_{21}=-\left[2\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)-\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\right]\cdot\left(n_1\cdot\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)+n_2\cdot\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\right) \quad \mathbf{(11)}$$

и диагональных,

$$\mathbf{R}'_{11}=\mathbf{R}'_{22}=\left[\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)-\frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}\right)\cdot\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)\right] \quad \mathbf{(12)}$$

компонент матрицы перехода.

Прямое сопоставление дает $\mathbf{R}'=\mathbf{R}''$ и доказывает вырождение решений Флоке, причем решения соответствующие одинаковым собственным значениям и собственным векторам матрицы перехода связаны преобразованием сдвига на половину периода. Характеристические уравнения для четных границ областей совпадают с приведенными выше соотношениями (5). Предложенная методика построения матрицы перехода в модели Мейснера дает новое характеристическое уравнение для границы области непропускания:

$$\left(2-\left(\frac{n_1}{\mathrm{n}_2}+\frac{n_2}{\mathrm{n}_1}\right)\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\right)=0. \quad \mathbf{(14)}$$

Решение (14) соответствует диагональной матрице перехода и ранее неизвестной паре линейно независимых периодических решений.

Выводы. Метод настоящей работы использует только наличие центра симметрии. При этом условии вырождение решений Флоке для волн в пространственно – периодической среде имеет место безотносительно к модели Мейснера. В частности, центр симметрии имеется в моделях параметрических систем соответствующих уравнениям Матье и Хилла. Результаты работы с очевидной модификацией справедливы для модели Кронига – Пенни в задаче Блоха и в задаче и импульсной накачке параметрической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука. 1979. - 384 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.М.: Наука. 1979. - 384 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
4. Ярив А., Юх П.Оптические волны в кристаллах. – М.:Мир, 1987. – 616 с.
5. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. – М: Наука, 1972. – 720 с.
6. Бреховских Л.М.Волны в слоистых средах .– М.: Изд-во АНССР, 1983.
7. Lopez C. Materials Aspects of Photonic Crystals // Adv. Mater. - 2003. - No. 20 (Oktober 18). - P. 1683-1701.
8. Займан Дж. Принципы теории твердого тела.-М.:Мир, 1974.–472 с.
9. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. - М.: Наука, 1989. – 288 с.
10. Чечулин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 220 с.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. -М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. - М.: Наука, 1990. –312 с.
13. Стретт М.Д.О. Функции Ляме,Матье и родственные им в физике и технике: Пер. с нем. - Киев-Харьков: Гос.науч.-тех.изд.-во Украины, 1935. –238 с.

Получено 17.03.2006 г.