УДК 514.18

А.Г. Ренкас

ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТОРУ K^4

Постановка проблеми. Формування сфер n–вимірного простору належить до числа задач, які розв'язує багатовимірна геометрія евклідового простору [1]. Частинні випадки відображення сфер використовуються у комплексному просторі при розв'язанні деяких задач, які полягають у формуванні замкнених областей параметрів.

Аналіз останніх досліджень. Основні тригонометричні функції косинус і синус комплексного аргументу одержують заміною дійсного значення аргументу на комплексне значення $t=T+i\tau$. В літературних джерелах перед знаком тригонометричної функції користуються співмножником у вигляді дійсного числа [2], що дорівнює функції:

$$\begin{aligned} \omega &= \cos t = \cos(T+i\tau) = \cos T ch\tau - i\sin T sh\tau; \\ z &= \sin t = \sin(T+i\tau) = \sin T ch\tau + i\cos T sh\tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Параметричні рівняння сфер, до складу яких входять основні тригонометричні функції, містять значення амплітуди. Для комплексного простору амплітуда набуває комплексне значення $R=r+i\bar{r}$. Значення обидвох функцій також комплексні $\omega=u+iv$ та $z=x+iy$, тому простором відображення основних тригонометричних функцій слугують чотиривимірні комплексні простори. З урахуванням комплексного значення R основні тригонометричні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega &= u+iv = R\cos(T+i\tau) = R(\cos T ch\tau - i\sin T sh\tau); \\ z &= x+iy = R\sin(T+i\tau) = R(\sin T ch\tau + i\cos T sh\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

Для дійсних значень амплітуди r основні тригонометричні функції мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \omega &= u+iv = r\cos T ch\tau - ir\sin T sh\tau; \\ z &= x+iy = r\sin T ch\tau + ir\cos T sh\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Формування цілей статті. Для формування сфер комплексного простору необхідно розробити геометричні засоби у вигляді комплексних та аксонометричних проекцій подання багатовидів як моделей основних тригонометричних функцій комплексного простору.

Основна частина. При дійсних значеннях аргументу T $(T=0)$ маємо вирази тригонометричних функцій у площинах дійсних змінних ouT і oxT:

 ISSN 1562-9945

$$\begin{aligned} \omega &= u = r\cos T; \\ z &= x = r\sin T. \end{aligned} \tag{4}$$

Для уявних значень аргументу τ *(T=0)* маємо вирази тригонометричних функцій у площинах *оіτu* та *оіτіy*

$$\begin{aligned} \omega &= u = rch\tau; \\ z &= iy = irsh\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо вирази (4) тригонометричних функцій визначають сферу двовимірного простору

$$\omega^2 + z^2 = u^2 + x^2 = r^2, \tag{6}$$

то вирази (5) визначають криву лінію комплексної площини *оіyu*:

$$\omega^2 + z^2 = u^2 + (iy)^2 = r^2(ch^2\tau + (ish\tau)^2).$$

Розкриши значення уявної одиниці, маємо

$$u^2 - y^2 = r^2, \tag{7}$$

звідки одержуємо залежність

$$u = \pm\sqrt{r^2 + y^2}, \tag{8}$$

що реалізується кривою лінією *оіyu*.

Проекції гіперповерхонь як графічних моделей основних тригонометричних функцій одержимо, використовуючи вирази (3).

Перетином поверхонь як проекцій основних тригонометричних функцій площинами рівня $i\tau_j$ одержуємо лінії каркасів, що описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} u_j &= r\,ch\tau_j \cos T; \\ iv_j &= -ir\,sh\tau_j \sin T; \\ x_j &= r\,ch\tau_j \sin T; \\ iy_j &= ir\,sh\tau_j \cos T. \end{aligned} \tag{9}$$

З рівнянь (9) видно, що проекції являють тригонометричні функції дійсного аргументу *T*, амплітуда яких залежить від положення січної площини τ_j (рис. 1).

Перетином поверхонь як проекцій основних тригонометричних функцій площинами рівня T_j одержуємо лінії каркасів, які описуються рівняннями

$$u_j = r\cos T_j ch\tau;$$
$$iv_j = -ir\sin T_j sh\tau;$$
$$x_j = r\sin T_j ch\tau;$$
$$iy_j = ir\cos T_j sh\tau. \qquad (10)$$

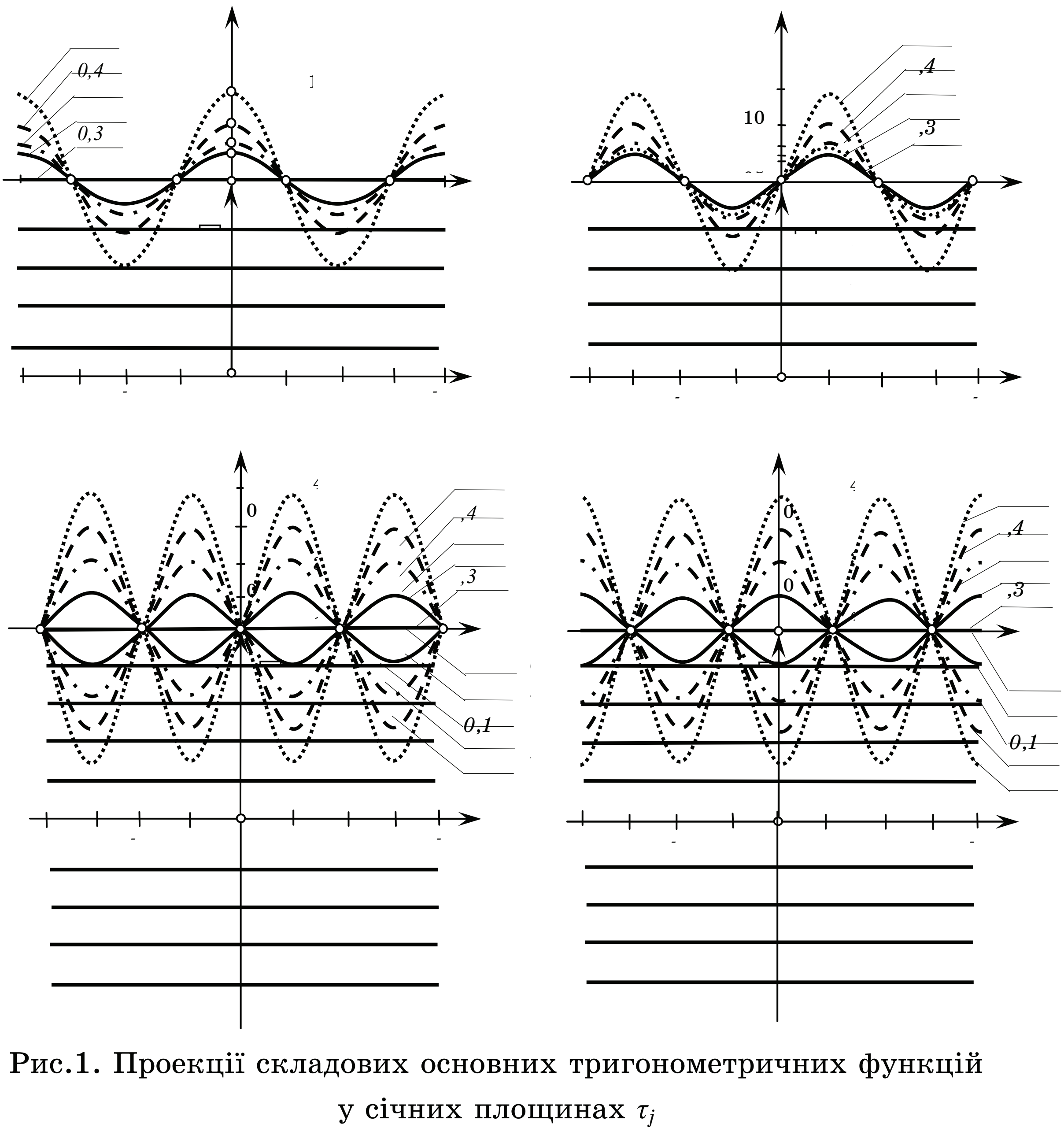

Рис.1. Проекції складових основних тригонометричних функцій у січних площинах τ_j

З рівнянь (10) видно, що проекції являють гіперболічні функції косинуса та синуса, вигляди яких визначаються положенням січної площини T_j (рис. 2).

Використовуючи приведені проекції основних тригонометричних функцій у двовимірних площинах, побудуємо їх проекції у тривимірних комплексних підпросторах *ouTiτ*, *oivTiτ, oxTiτ, oiyTiτ* (рис. 3).

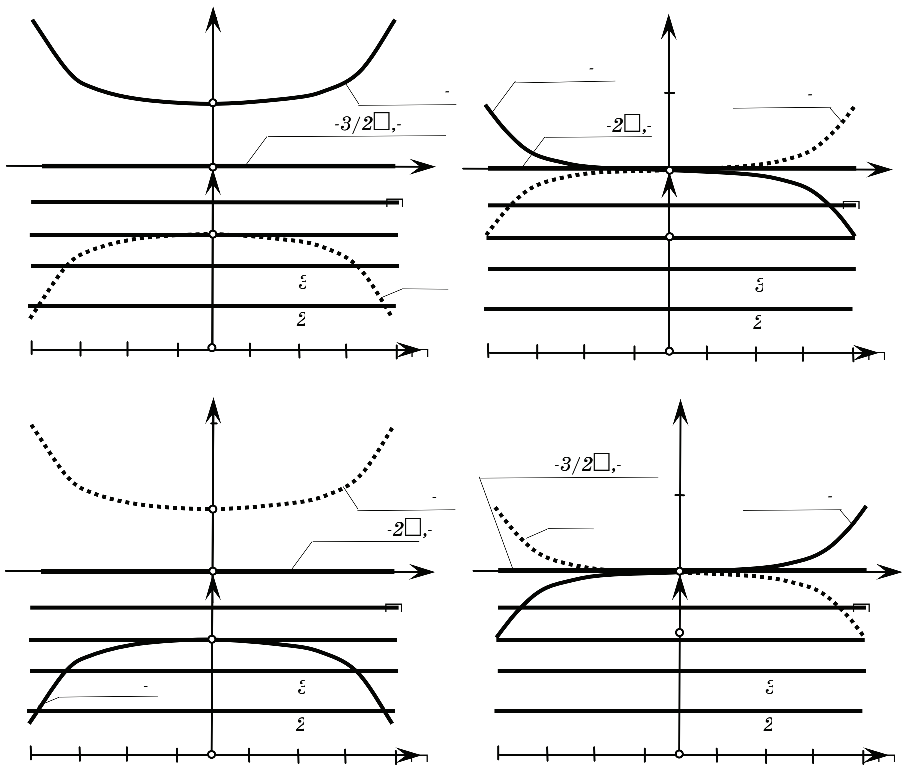

Рис.2. Проекції складових основних тригонометричних функцій у січних площинах T_j

Аналіз дво- і тривимірних проекцій основних тригонометричних функцій показує, що їх дійсні та уявні частини мають нулі з періодом *П* в усій двовимірній комплексній площині *oTiτ* та є періодичними, амплітуди усіх складових змінюються пропорційно до зміни гіперболічних *chτ* і *shτ*.

Прирівняємо обидві тригонометричні функції до нуля:

$$\begin{aligned} &\omega = u + iv = \cos T ch\tau - i\sin T sh\tau = 0; \\ &z = x + iy = \sin T ch\tau + i\cos T sh\tau = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Висновки. Для рівності нулю комплексних значень ω і z потрібно, щоб дорівнювали нулю дійсна і уявна частини одночасно. При $\tau=0$ уявні частини обидвох виразів (11) дорівнюють нулю. Дійсні частини являють вирази $u = \cos T = 0$, $x = \sin T = 0$, які дорівнюють нулю відповідно при T=(2n-1)π / 2 і nπ. При інших значеннях τ з періодом nπ/2 перетворюються у нуль почергово дійсні та уявні частини (11).

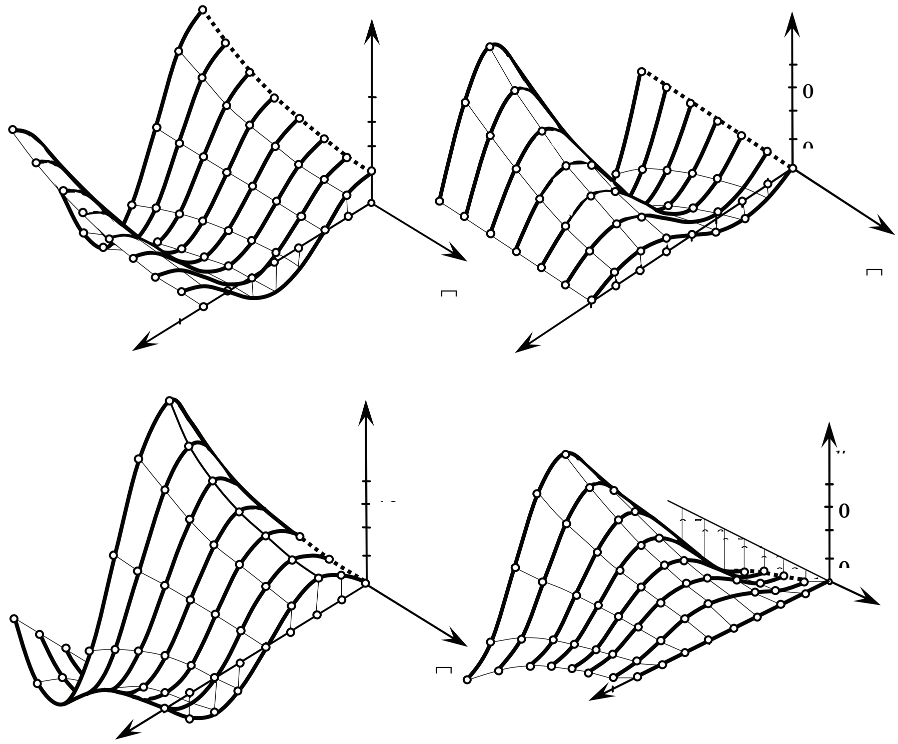

Рис. 3. Основні тригонометричні функції у тривимірних комплексних підпросторах при значеннях амплітуди *r*

ЛІТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства - М.:Наука, 1966.– С. 215 - 232.
2. Мартин Є.В. Визначення деяких метричних характеристик лінійної аналітичної функції комплексних змінних // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1998. – Вип. 64. – С. 112–115.
3. Gumen M.S., Martyn E.V., Renkas A.G.. Graphic representation of the multikinds of the complex space K^4 // Праці Х-ї Всесвітньої конференції з прикладної геометрії та графіки. Том 1. – К. :КНУБА, 2002. – С. 149–151.

Получено 20.03.2006 г.