

ПАРАМЕТРИЧНІ ТА НАТУРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КРИВИХ ІЗ ЗАДАНИМИ КІНЕМАТИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Постановка проблеми. При дослідженні плоских кривих виявляються властивості, які можуть бути використані для розв'язування технічних задач. Інколи такі криві, окрім параметричних, мають також натуральні рівняння. До них відносяться: логарифмічна спіраль, ланцюгова лінія, евольвента кола, трактриса та ін. [1]. Закономірний також шлях знаходження параметричних та натуральних рівнянь кривих за наперед заданими властивостями.

Аналіз останніх досліджень. Взаємозв'язок параметричних та натуральних рівнянь кривих є предметом дослідження для багатьох авторів. Про це свідчить згадувана праця [1], а також праці окремих дослідників [2-4].

Формулювання цілей статті. Знайти параметричні та натуральні рівняння кривих за заданими кінематичними характеристиками руху по них матеріальної точки.

Основна частина. Якщо матеріальна точка рухається по циліндричній поверхні з горизонтальними твірними під дією сили власної ваги, то її траєкторією буде плоска крива – ортогональний переріз поверхні. Таким чином розгляд руху точки по поверхні можна звести до її руху по плоскій кривій, яка розташована у вертикальній площині. Із теоретичної механіки відомо, що при русі матеріальної точки по криволінійній траєкторії виникає відцентрова сила F_c , яка завжди спрямована по головній нормалі в сторону, протилежну від центра кривини. Інша сила – сила тертя F_m – завжди спрямована по дотичній до траєкторії в сторону, протилежну напрямку руху. Звідси випливає, що при складанні диференціального рівняння руху точки зручно проєкціювати сили на орти супровідного тригранника траєкторії. Розглянемо матеріальну точку (або частинку) на кривій та прикладені до неї сили (рис. 1). Диференціальне рівняння руху матеріальної частинки у векторному вигляді запишеться:

$$m\overline{w} = \overline{F}, \quad (1)$$

де \overline{w} - вектор прискорення; \overline{F} - вектор результуючої сили; m – маса частинки.

© С.Ф.Пилипака, В.М.Несвідомін, Т.С.Пилипака, 2006

Оскільки частинка рухається в напрямі дотичної $\bar{\tau}$, то рівняння (1) запишемо в проекції на цей орт:

$$mw = mg \sin \alpha - F_m, \quad (2)$$

де mg – сила ваги частинки ($g=9,81 \text{ м/с}^2$); α – кут між напрямом головної нормалі і вектором сили ваги; F_m – сила тертя.

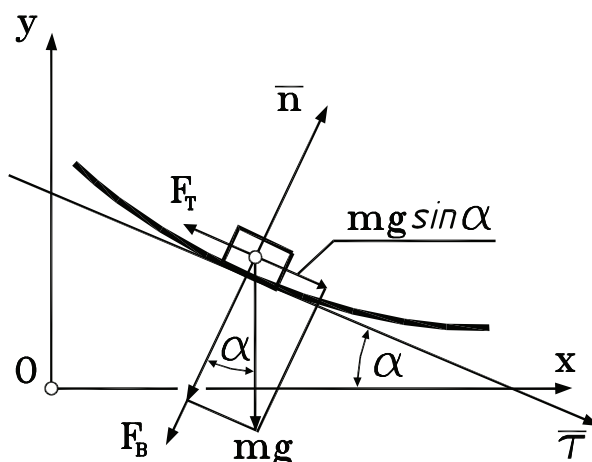


Рисунок 1 – Розкладання діючих сил на головну нормаль \bar{n} і дотичну $\bar{\tau}$

Сила тертя F_m залежить від сили тиску і коефіцієнта тертя f . Спроеціювавши всі сили на головну нормаль і помноживши на f , отримаємо:

$$F_m = f(F_v + mg \cos \alpha) \quad \text{або} \quad F_m = f(mv^2 k + mg \cos \alpha) \quad (3)$$

де v – швидкість руху частинки; k – кривина траєкторії в точці, в якій знаходиться частинка.

Рівняння (2) із врахуванням (3) після скорочення на масу m набуває вигляду:

$$w = g \sin \alpha - f(v^2 k + g \cos \alpha). \quad (4)$$

За рівняннями (4) можна знаходити швидкість і прискорення частинки, якщо задана крива у вигляді $k=k(\alpha)$ або ж знаходити саму криву за заданими кінематичними параметрами руху. Розглянемо два випадки із постійною швидкістю руху ($v=const$).

Випадок перший. Знайдемо криву, на яку частинка при русі по ній чинить нульовий тиск. Для цього прирівняємо силу тиску (3) до нуля:

$$f(mv^2k + mg \cos \alpha) = 0 \quad \text{звідки} \quad k = \frac{g}{v^2} \cos \alpha. \quad (5)$$

Якщо відома залежність радіуса кривини від кута α , $\rho = \frac{1}{k(\alpha)}$, то параметричні рівняння кривої можна знайти із виразів [3]:

$$x = \int \rho \cos \alpha \, d\alpha; \quad y = \int \rho \sin \alpha \, d\alpha. \quad (6)$$

Підставивши (5) у (6), одержимо:

$$x = \frac{v^2}{g} \alpha; \quad y = \frac{v^2}{g} \int \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha = -\frac{v^2}{g} \ln \cos \alpha. \quad (7)$$

Знайдемо довжину дуги s кривої (7). Оскільки $k = \frac{d\alpha}{ds}$, то $ds = \frac{d\alpha}{k}$. Із врахуванням (5), цей вираз можна записати наступним чином:

$$s = \frac{v^2}{g} \int \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{v^2}{g} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (8)$$

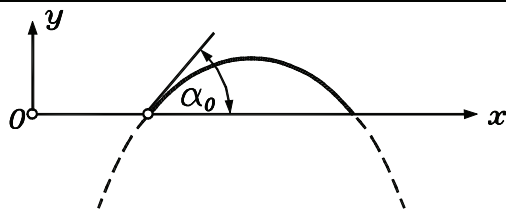
Щоб знайти натуральне рівняння кривої (7), необхідно виключити із рівнянь (5) і (8) спільний параметр α . Шляхом перетворень із (8) знаходимо:

$$\cos \alpha = \frac{2 \exp\left(\frac{g}{v^2} s\right)}{1 + \exp\left(\frac{2g}{v^2} s\right)} = \operatorname{sech} \left(\frac{g}{v^2} s \right). \quad (9)$$

Підставивши (9) в (5), одержимо натуральне рівняння кривої, заданої параметричними рівняннями (7):

$$k = \frac{g}{v^2} \operatorname{sech} \left(\frac{g}{v^2} s \right). \quad (10)$$

Отримане рівняння (10) описує лінію, яка в науковій літературі відома, як ланцюгова лінія рівного опору [1]. Форму такої кривої приймає гнучка важка нитка із змінним поперечним перерізом. Така нитка у всіх перерізах має однакову міцність, отже і однакову ймовірність розриву. Звідси і походить назва кривої [1].

Рисунок 2 – Крива, задана рівняннями (7) і (10) для $v=3$ м/с

Якщо таку криву повернути на 180° , тобто розташувати вершиною вгору, то вона стає, як ми з'ясували, кривою нульового тиску (рис.2). Якби по мосту заданої форми (рис.2) рухалося тіло із постійною швидкістю v , яка входить до рівнянь (7), то тиск на міст був би відсутній. Звідси іще одне трактування цієї кривої – це крива, що є траєкторією руху тіла, кинутого під кутом до горизонту без врахування опору середовища, якщо тіло рухається із постійною швидкістю. Із курсу теоретичної механіки відомо, що тіло, кинуте під кутом до горизонту, рухається по параболі, однак швидкість при цьому змінна. Якби тілу вдалося забезпечити сталу швидкість, то воно рухалось би по знайденій кривій.

Випадок другий. Знайдемо криву, по якій рухається частинка із постійною швидкістю під дією сили власної ваги за наявності тертя. В такому випадку прискорення $w = 0$ і з рівняння (4) можна знайти:

$$k = \frac{g \sin \alpha - fg \cos \alpha}{fv^2} \quad \text{або} \quad \rho = \frac{fv^2}{g \sin \alpha - fg \cos \alpha}. \quad (11)$$

Перед тим, як інтегрувати вирази (6) із врахуванням (11), зробимо деякі спрощення. Відомо, що $f = \operatorname{tg} \varphi$, де φ - кут тертя. Якщо площину із відомим коефіцієнтом тертя f встановити під кутом φ до горизонтальної площини, то частинка по цій площині буде рухатися із постійною початковою швидкістю, включаючи і $v = 0$ (перебуває в спокої). Підставимо в (11) замість f його значення $\operatorname{tg} \varphi$ і після спрощень проінтегруємо за формулами (6):

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \int \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} d\alpha = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \{ \ln[\sin(\alpha - \varphi)] \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \}; \\ y &= \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \int \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} d\alpha = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \{ \ln[\sin(\alpha - \varphi)] \sin \varphi + \alpha \cos \varphi \}. \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 3 за рівняннями (12) зображено криву для $f=0,577$ ($\varphi=\pi/6$) і $v=3$ м/с. Матеріальна частинка буде рухатися по кривій вниз із заданою постійною початковою швидкістю за рахунок сили ваги, яка врівноважується силою тертя. Крива розбита на ділянки точками A і B . Якщо надати частинці в точці A початкову швидкість v , спрямовану вправо, то частинка буде рухатися із цією швидкістю по опуклій стороні кривої, яка з часом все більше наближається до прямої, нахиленої до горизонту під кутом тертя φ . Якщо ж в точці A надати частинці початкову швидкість v , спрямовану вліво, то вона теж буде рухатися далі із цією швидкістю по кривій, яка з часом наближатиметься до прямої, але вже по увігнутій стороні. В цьому випадку дугу AB можна вважати кожухом, який змінює напрям руху частинки під час вільного польоту. Якби не було кожуха AB , то частинка рухалася б по параболі із прискоренням (без врахування опору середовища). Кожух гасить прискорення за рахунок тертя і зберігає швидкість постійною.

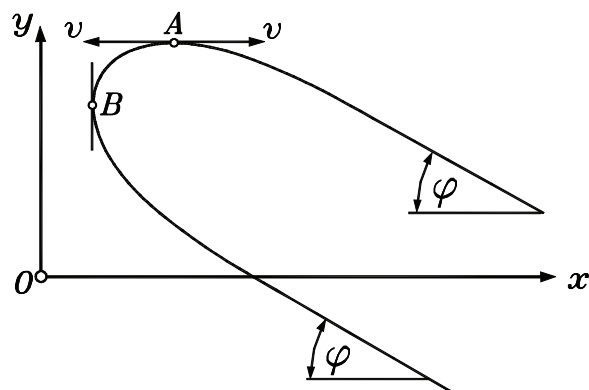


Рисунок 3 – Крива, задана рівняннями (12) для $\varphi = \pi/6$ і $v=3$ м/с

Знайдемо натуральне рівняння кривої (12). Із врахуванням того, що $f = \text{tg} \varphi$, перший вираз (11) можна переписати:

$$k = \frac{g}{v^2 \sin \varphi} \sin(\alpha - \varphi). \quad (13)$$

Визначимо довжину дуги s аналогічно (8):

$$s = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \int \frac{d\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \ln \left[\text{tg} \left(\frac{\alpha - \varphi}{2} \right) \right]. \quad (14)$$

Щоб отримати натуральне рівняння, необхідно виключити із рівнянь (13), (14) змінну величину α . Перейдемо в рівнянні (14) від $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)$ до $\sin(\alpha - \varphi)$. Після перетворень одержимо:

$$\sin(\alpha - \varphi) \left[\left(1 + \exp\left(\frac{2gs}{v^2 \sin \varphi}\right) \right) \sin(\alpha - \varphi) - 2 \exp\left(\frac{2g}{v^2 \sin \varphi}\right) \right] = 0. \quad (15)$$

Із (15) можна знайти два значення $\sin(\alpha - \varphi)$:

$$\sin(\alpha - \varphi) = 0, \quad \text{тобто } \alpha = \varphi \quad \text{і} \quad \sin(\alpha - \varphi) = \operatorname{sech}\left(\frac{gs}{v^2 \sin \varphi}\right). \quad (16)$$

У першому випадку із (13) одержимо: $k = 0$, тобто маємо пряму лінію, нахилену під кутом φ до горизонтальної прямої. Підстановка другого виразу (16) в (13) дасть натуральне рівняння кривої:

$$k = \frac{g}{v^2 \sin \varphi} \operatorname{sech} \frac{g}{v^2 \sin \varphi} s. \quad (17)$$

Порівнюючи натуральні рівняння (10) і (17) бачимо, що вони відрізняються тільки сталим коефіцієнтом, тобто описують одну і ту ж криву.

Твердження. Крива постійної швидкості під дією сили власної ваги, вісь симетрії якої нахилена під кутом φ до горизонтальної прямої, де φ - кут тертя, може стати кривою постійної швидкості нульового тиску. Для цього її потрібно повернути вершиною вгору так, щоб вісь симетрії стала вертикальною і надати матеріальній точці швидкості $v\sqrt{\sin \varphi}$, де v і φ - відповідно швидкість і кут, за якими була розрахована перша крива.

Для доведення даного твердження достатньо прирівняти між собою сталі коефіцієнти у рівняннях (10) і (17). Слід зазначити, що кут тертя φ не може бути довільним – він знаходиться в певних межах в залежності від матеріалу, який рухається і по якому рухається частинка. Наприклад, при $\varphi = 0$ (тертя відсутнє, поверхня ідеально гладенька) твердження втрачає сенс. Необхідно також звернути увагу на те, що твердження вдалося сформулювати завдяки переходу від параметричних рівнянь (7) і (12) кривих до їх натуральних рівнянь.

Висновки. За заданими кінематичними характеристиками руху матеріальної точки знайдено криві ортогональних перерізів циліндрів, що забезпечують цей рух із постійною швидкістю. З одержаних натуральних рівнянь кривих з'ясовано, що крива постійної швидкості руху під дією сили власної ваги точки і крива, що чинить нульовий тиск, описуються одним і тим же натуральним рівнянням. Криві відрізняються сталими коефіцієнтами у натуральних рівняннях і положенням у вертикальній площині. Такі криві в науковій літературі носять назву ланцюгової лінії рівного опору. Досліджені властивості доповнюють трактування фізичної суті цих кривих.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. – М.: Физматгиз, 1960. – 292 с.
2. Пилипака С.Ф. Графо-аналитический метод приближенного построения кривой по заданному натуральному уравнению // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1989. – Вып. 48. – С. 44-45.
3. Бадаев С.Ю. Універсальний криволінійний обвід // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 189-191.
4. Борисенко В.Д., Устенко С.А. Спіцин В.Є. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривиною // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наукових праць Харк. державного університету харчування та торгівлі. – Харків, 2004. – Вип. 5. – С. 30-34.

Получено 17.03.2006 г.

УДК 515.2

О.Л. Підгорний

ПРИКЛАДНУ ГЕОМЕТРІЮ У НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

Постановка проблеми. Впровадження в практику результатів досліджень з прикладної геометрії в окремих роботах чи циклах робіт набув галузевого характеру. Але, як правило, впровадження в практику, особливо по кандидатських дисертаціях, носить характер окремих прикладів, які не мають значного поширення.

© О.Л. Підгорний, 2006