УДК 515.2

В.В. Ванін, М.С. Гумен, О.М. Гумен

ВИРАЖЕННЯ РІВНЯНЬ РАЦІОНАЛЬНИХ БАГАТОВИДІВ У ПАРАМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

Розглядається конструювання та дослідження рівнянь раціональних багатовидів, поданих у параметричній формі, у внутрішній неевклідовій проективній системі координат з наведенням конкретних прикладів.

Постановка проблеми. Багатовиди у прикладній багатовимірній геометрії використовуються як геометричні моделі залежностей між багатьма змінними самої різної фізичної природи. При цьому важливою умовою до конструйованого багатовиду є вимога одержати вираз моделі у математичній формі, зручній для використання на комп'ютері. Однією з найзручніших вважається подача залежностей між змінними у вигляді раціональних функцій у параметричній формі. Тому проблема зводиться до моделювання багатопараметричних залежностей раціональними багатовидами з рівняннями у параметричній формі. Як один із можливих підходів до розв'язання цієї проблеми є дослідження раціональних багатовидів у внутрішній проективній системі координат, що й розглядається у даній роботі.

Аналіз останніх досліджень. Взагалі багатовиди використовуються багатьма дослідниками як геометричні моделі в різних галузях народного господарства. Серед різноманітних методів дослідження багатовидів зустрічаємо і внутрішню систему координат для побудови 3-вимірної геометрії у праці [1]. Раціональні поверхні і криві лінії використовуються у методах проектування поверхонь літальних апаратів [2 - 4]. Узагальненням раціональних кривих і поверхонь до раціональних багатовидів у внутрішній координатній неевклідовій проективній системі присвячені праці [5- 12].

Формулювання цілей статті. Ціллю статті є одержання рівнянь раціональних багатовидів у параметричній формі шляхом розгляду їх у внутрішній проективній неевклідовій системі координат та узагальнення раніше одержаних результатів у попередніх працях.

Основна частина. Перед тим, як досліджувати багатовид у внутрішній неевклідовій системі координат, розглянемо спочатку узагальнення n-вимірного лінійного простору з прямокутною системою координат $Ox_1 \dots x_n$ до проективного нелінійного. Перехід від декартових до однорідних проективних координат $u_1, \dots, u_{n+1}$ може бути виражений такими відношеннями:

$$x_1 = \frac{u_1}{u_{n+1}}, \quad x_2 = \frac{u_2}{u_{n+1}}, \cdots \quad x_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Таким чином, для кожної точки простору можна вкласти однопараметричну сукупність із $n+1$ чисел $tu_1, tu_2, \dots, tu_{n+1}$, де t – довільний параметр; $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ – конкретні числа, відношення яких до u_{n+1} дорівнюють декартовим координатам $x_1, x_2, \dots, x_n$, та одиниці, оскільки $u_{n+1} : u_{n+1} = 1$. Числа $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ називаються проективними координатами точки.

Вектори точок проективного лінійного простору у векторній параметричній формі можна записати у вигляді:

$$\mathbf{r} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i \mathbf{r}_i \mathrm{u}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i \mathrm{u}_i}, \tag{1}$$

де $\mathbf{r}_i$ – радіуси-вектори каркасних точок; a_i – змінні коефіцієнти; u_i –біжучі однорідні параметри.

Якщо тепер перейти від проективної координатної системи лінійного проективного простору до системи координат у нелінійному просторі, то рівнянню (1) відповідатиме аналогічне рівняння в нелінійному проективному просторі у вигляді:

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_{i_j} \mathbf{r}_{i_j} \mathrm{u}_{i_j}}{\sum_{i=1}^{n+1} a_{i_j} \mathrm{u}_{i_j}}, \ j = 1, ..., \mathrm{m}. \tag{2}$$

Структура запису індексів при коефіцієнтах рівняння (2) така, що вони вказують, біля добутку яких змінних параметрів u_{ij} вони розміщені. Це дозволяє подати коефіцієнти рівняння (2) у вигляді тензорів:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = |a_{i_j} \mathbf{r}_{i_j}|; \\ &\mathrm{B} = |a_{i_j}|, \quad i = 1,..., \mathrm{n}+1; \ j = 1,..., \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Параметри u_{ij} рівняння (2) будуть однорідними, якщо сума показників у них стала для всіх складових рівняння. Простір з відношеннями (2) є нелінійним проективним і ототожнюється з багатовидом, порядок якого дорівнює валентності m тензорів (3), що визначається, у свою чергу, сумою показників однорідних параметрів u_{ij} у одному із складових чисельника чи знаменника рівняння (2). При цьому ранг тензорів (3) на одиницю більший за розмірність простору, а число компонентів тензорів дорівнює $(n+1)^m$, де m – валентність тензорів.

Нехай тепер маємо деякий k-багатовид як проективний неевклідовий простір, що у внутрішній системі координат записується рівнянням:

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{in=0}^{k} \mathrm{u}_{in...} \sum_{i1=0}^{k} a_{in...i1}\, r_{in...i1}\, u_{i1}}{\sum_{in=0}^{k} \mathrm{u}_{in...} \sum_{i1=0}^{k} a_{in...i1}\, u_{i1}}, \tag{4}$$

де k - розмірність багатовиду; n – алгебраїчний порядок багатовиду; $u_0,...,u_k$ - змінні однорідні параметри; $\mathbf{r}_{in...i1}$ - радіуси-вектори каркасних точок; $a_{in...i1}$ – коефіцієнти рівнянь у відповідних каркасних точках.

У обхоплюючому просторі дотична гіперплощина до багатовиду (4) у точці $(u_0, ..., u_k)$ буде мати рівняння у вигляді:

 ISSN 1562-9945

$$\mathbf{r}=\frac{\sum\limits_{in=0}^{k}\bar{\mathrm{u}}_{in...}\sum\limits_{i(n-1)=0}^{k}\bar{\mathrm{u}}_{i(n-1)...}\sum\limits_{i1=0}^{k}a_{in...i1}\,r_{in...i1}\,u_{i1}}{\sum\limits_{in=0}^{k}\bar{\mathrm{u}}_{in...}\sum\limits_{i(n-1)=0}^{k}\bar{\mathrm{u}}_{i(n-1)...}\sum\limits_{i1=0}^{k}a_{in...i1}\,u_{i1}}, \tag{5}$$

де: $\bar{\mathbf{u}}_{in...}$ - змінні однорідні параметри.

Якщо тепер у (5) будемо виражати змінні параметри $\bar{u}_0,...,\bar{u}_k$ у функції деяких нових змінних, то одержимо сімейства похідних підбагатовидів. Так, наприклад, для випадку 3-багатовиду у 4-вимірному обхоплюючому просторі одержуємо рівняння

$$\mathbf{r}=\frac{\sum\limits_{i2=0}^{3}\mathrm{u}_{i2}\sum\limits_{i1}^{3}a_{i2i1}\,r_{i2i1}u_{i1}}{\sum\limits_{i2=0}^{3}\mathrm{u}_{i2}\sum\limits_{i1=0}^{3}a_{i2i1}u_{i1}}, \tag{6}$$

де u_{i1}, u_{i2} – змінні однорідні параметри; $\mathbf{r}_{i2i1}$ – радіуси-вектори каркасних точок; a_{i2i1} – коефіцієнти рівняння у відповідних каркасних точках.

Рівняння дотичної гіперплощини до 3-багатовиду (6) має вигляд

$$\mathbf{r}=\frac{\sum\limits_{i2=0}^{3}\bar{\mathrm{u}}_{i2}\sum\limits_{i1=0}^{3}a_{i2\,i1}\,r_{i2\,i1}u_{i1}}{\sum\limits_{i2=0}^{3}\bar{\mathrm{u}}_{i2}\sum\limits_{i1=0}^{3}a_{i2\,i1}\,u_{i1}}, \tag{7}$$

де $\bar{\mathbf{u}}_{i1}$, $\bar{\mathbf{u}}_{i2}$ - змінні однорідні параметри.

Якщо тепер у (7) параметри $\bar{\mathbf{u}}_{i1}$, $\bar{\mathbf{u}}_{i2}$ виразити як функції деяких змінних, то одержимо сімейства похідних підбагатовидів.

Як бачимо, розглянутий підхід до конструювання і дослідження рівнянь раціональних багатовидів дозволяє одержувати неперервні сімейства підбагатовидів потрібних розмірностей і алгебраїчних порядків у вигляді параметричних дробово-раціональних рівнянь.

Висновки та перспективи. Розглянуте трактування раціональних багатовидів як нелінійних проективних просторів дозволяє максимально спростити алгоритм конструювання їх рівнянь у вигляді, прийнятному для використання комп'ютерів, та являється універсальним для багатовидів різних розмірностей і алгебраїчних порядків. У перспективі запропонований підхід як універсальний знайде своє практичне застосування при дослідженнях багатопараметричних систем у різних галузях знань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Скотт П. Геометрия на трехмерных многообразиях / Пер. с англ. С.К. Ландо: Под. ред. В.И. Арнольда, ред. А.Н. Колмогоров, С.П. Новиков. - М.: Мир, 1986. - 163 с.
2. Надолинный В.А. Основы теории проективных рациональных поверхностей / Автореф. дис. докт. техн. наук. - М., 1989. - 30 с.
3. Надолинный В.А. Аналитические методы в конструировании поверхностей // Учебное пособие для слушателей ФПК. – К.: КПИ, 1981. – 43с.
4. Надолинный В.А. Методические указания по курсу „Геометрические методы построения некоторых кривых линий и поверхностей” для студентов и слушателей Межотраслевого института повышения квалификации кадров по новым направлениям развития техники и технологии – К.: КПИ, 1991. – 36 с.
5. Гумен М.С., Гумен О.М. Багатовимірний неевклідовий проективний простір як узагальнення евклідового // Доклады первой научно-практической конференции “Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн”. Сб. научн. тр. – К.: КНУТД, 2004. – С. 78-81.
6. Гумен О.М. Внутрішня проективна система координат раціональних багатовидів // Прикл. геом. та інж. графіка: Зб. наук. пр. - Мелітополь: ТДАТА, 2004. – Вип.4. – Т.28. - С.104 -108.
7. Гумен О.М. Дослідження рівнянь багатовидів у проективній системі координат // Геометричне та комп’ютерне моделювання: Зб. наук. пр. – Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип.7. - С. 107-113.

 ISSN 1562-9945

8. Гумен О.М. Дослідження k-багатовидів за координатними m-підбагатовидами (m x k) // Прикл. геом. та інж. графіка: Зб. наук. пр. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. — Вип. 4. – Т. 29. - С. 69 -72.
9. Гумен О.М. Дослідження раціонального 3-багатовиду 4-вимірного афінного простору у внутрішній проективній системі координат // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Зб. наук. пр. – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 11. – С.105-109.
10. Гумен О.М. До конструювання раціональних багатовидів як неевклідових проективних просторів // Прикл. геом. та інж. графіка: Зб. наук. пр. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 75. - С.136-142.
11. Гумен О.М. Раціональні 3-багатовиди 2-го та 3-го порядків з рівнянням у параметричній формі // Прикл. геом. та інж. графіка: Зб. наук. пр. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. – Вип. 4. – Т.30. - С.80-84.
12. Гумен О.М. Раціональні криві і поверхні 2-го і 3-го порядків як окремі випадки багатовидів // Доповіді Другої Кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – К.: КНУТД, 2005. – С. 66-70.

Получено 21.03.2006 г.

УДК 515.2:621.83

Воронцов Б.С., Чаплинская Т.Н.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ РЕЕЧНОГО ТИПА С ИЗМЕНЯЕМОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ФОРМОЙ ЗУБА

Постановка проблемы. Современные компьютерные технологии позволяют решать целый ряд задач повышения качества, надежности, экономичности и производительности различных машин и механизмов еще на стадии технологической подготовки производства.

Наибольшее распространение в приводах машин имеют цилиндрические передачи с параллельными осями. При совершенствовании зубчатых приводов машин с такими передачами перспективным является использование цилиндрических передач с арочной и двояковыпукло-вогнутой продольной формой зубьев.