базируется на использовании только алгоритмов быстрого преобразования Фурье.

4. Поскольку инвариантная характеристика вычисляется в спектральной Фурье-области (т.е. все трансформации являются интегральными), то это автоматически исключает необходимость определения центра анализируемого (классифицируемого) объекта в плоскости апертуры анализируемого изображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Theodoridis S., Koutroumbas K. Pattern Recognition. Second Ed. – Elsevier: Academic Press. – 2003.
2. Форсайт Д., Понс Ж. Компьютерное зрение: современный подход. – М.: Вильямс. – 2004.
3. Wang L., Healey G. Using Zernike moments for the illumination and geometry invariant classification of multispectral texture. IEEE Trans. Image Processing. – Vol. 7 (2), 1998. – P. 196-203.
4. Khotanzag A., Hong U. Invariant image recognition by Zernike moments. IEEE Trans. Pattern Analysis and Mashine Intelligence. – Vol. 12, 1990. – P.489-497.
5. Применение методов фурье –оптики / Под ред. Дж.Кейсесента: Пер. с англ. - М.: Радио и связь. – 1988.

Получено 11.03.2006 г.

УДК 515.2

Ю.І.Бадаєв,
О.М.Ковтун

СПЛАЙНИ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ

Постановка проблеми. Поліноміальні сплайни п'ятого степеня досі широко не вивчаються і не застосовуються, найменшою мірою, у вітчизняному виробництві, але дають більші можливості для проектування більш гладких кривих і поверхонь, що є важливим для агрегатів і машин, які працюють у рухомому середовищі, а також мають досить широкі можливості керування формою при зберіганні гладкості другого і вищих порядків.

 ISSN 1562-9945

Аналіз публікацій. В книгах [1,2] детально описуються застосування сплайнів третього степеня. Сплайни вище третього степеня взагалі не вивчаються. Можна вказати лише на статті авторів [3,4]. Із [1,2] можна взяти методи і засоби і застосувати їх для сплайнів вищих степенів.

Цілі статті. Ціллю цієї статті є показати особливості і переваги сплайнів п'ятого степеня.

Основна частина. Поліном п'ятого степеня визначається за формулою:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5. \quad \textbf{(1)}$$

Є очевидним, що поліном п'ятого степеня повністю визначається шістьма коефіцієнтами, а, значить, шістьма геометричними умовами.

Ці умови можна подати у різних варіантах. Найбільш практичними, на наш погляд, є наступний варіант. Задані дві кінцеві точки, перші та другі похідні в них. У такому вигляді поліном буде мати вигляд:

$$y = \alpha_0(u)y_0 + \alpha_1(u)y_1 + h[\beta_0(u)y'_0 + \beta_1(u)y'_1] + h^2[\gamma_0(u)y''_0 + \gamma_1(u)y''_1], \quad \textbf{(2)}$$

де x_0 , y_0 – координати початкової точки,

x_1 , y_1 – координати кінцевої точки,

y'_0 , y'_1 , y''_0 , y''_1 – перші і другі похідні в початковій і кінцевій точках,

$u=(x - x_0)/ (x_1 - x_0)$,

$a_i (u)$, $\square_i (u)$, $\square_i (u)$ – функції від параметра u, що дорівнюють:

$\square_0(u)=1-10u^3+15u^4-6u^5$, $\square_1(u)=10u^3-15u^4+6u^5$, $\square_0(u)=u-6u^3+8u^4-3u^5$,

$\square_1(u)=-4u^3+7u^4-3u^5$,

$\square_0(u)=0.5u^2-1.5u^3+1.5 u^4-0.5 u^5$, $\square_1(u)=0.5u^3-u^4+0.5u^5$.

Продиференціюємо (2) по x. Будемо мати:

$$y_x^n= y_u^n \; u_x^n = y_u^n /h^n=\{\square^n_0(u)y_0 + \square^n_1(u)y_1 + h[\square^n_0(u)y'_0 + \square^n_1(u)y'] + h^2 [\square^n_0(u)y''_0 + \square^n_1(u)y''_1]\}/h^n, \quad \textbf{(3)}$$

де n – похідна відповідного степеня.

На основі застосування формули для поліноміальної кривої п'ятого степеня (2) можна розробити такі варіанти сплайнів п'ятого степеня.

Сплайни із другим порядком гладкості (дефект 3). Щоб задати зазначений вище сплайн, необхідно у заданих точках ***i=0,...,N*** позначити довільним або адекватним чином перші та другі похідні. На кожній ділянці *i - (i+1)* буде визначено криву (2) за заданими умовами.

Сплайни із третім порядком гладкості (дефект 2). Підставимо треті похідні в (2) і прирівняємо функції для попередньої і наступної ділянок

Отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&8[h^{(i-1)}]^{-2}y'^{(i-1)}+12\{[h^{(i-1)}]^{-2}-[h^{(i)}]^{-2}\}y'^{(i)}-8[h^{(i)}]^{-2}y'^{(i+1)}+\\
&+[h^{(i-1)}]^{-1}y''^{(i-1)}-3\{[h^{(i-1)}]^{-1}+[h^{(i)}]^{-1}\}y''^{(i)}+[h^{(i)}]^{-1}y''^{(i+1)}=\\
&=-20\{[h^{(i-1)}]^{-3}y^{(i-1)}-([h^{(i-1)}]^{-3}+[h^{(i)}]^{-3})y^{(i)}+[h^{(i)}]^{-3}\}y^{(i+1)},\\
&i=1,2,...,N-1,\ \ h^{(i)}=x^{(i+1)}-x^{(i)}.
\end{aligned}$$

(4)

Якщо задати у точках адекватні значення $\boldsymbol{y_i'}$, то будемо мати систему лінійних рівнянь із трьохдіагональною головною матрицею для визначення у заданих точках других похідних $\boldsymbol{y_i''}$. Для розв'язання необхідно дозадати ще дві крайові похідні.

Сплайни із четвертим порядком гладкості. Підставимо четверті похідні і прирівняємо функції (2) для попередньої і наступної ділянок. Матимемо систему:

$$\begin{aligned}
&14[h^{(i-1)}]^{-3}y'^{(i-1)}+16\{[h^{(i-1)}]^{-3}+[h^{(i)}]^{-3}\}y'^{(i)}+14[h^{(i)}]^{-3}y'^{(i+1)}+\\
&+2[h^{(i-1)}]^{-2}y''^{(i-1)}-3\{[h^{(i-1)}]^{-2}-[h^{(i)}]^{-2}\}y''^{(i)}-2[h^{(i)}]^{-2}y''^{(i+1)}=\\
&=-30\{[h^{(i-1)}]^{-4}y^{(i-1)}+([h^{(i-1)}]^{-4}-[h^{(i)}]^{-4})y^{(i)}+30[h^{(i)}]^{-4}y^{(i+1)}\},\\
&i=1,2,...,N-1,\ \ h^{(i)}=x^{(i+1)}-x^{(i)}.
\end{aligned}$$

(5)

Для забезпечення повного четвертого порядку гладкості треба розглядати (4) сумісно із (5). Відтак будемо мати:

ISSN 1562-9945

$$a_{(2i-1)}y'^{(i-1)}+b_{(2i-1)}y''^{(i-1)}+c_{(2i-1)}y'^{(i)}+d_{(2i-1)}y''^{(i)}+e_{(2i-1)}y'^{(i+1)}+f_{(2i-1)}y''^{(i+1)}=g_{(2i-1)},$$

$$a_{(2i)}\ y'^{(i-1)}+b_{(2i)}\ y''^{(i-1)}+c_{(2i)}\ y'^{(i)}+d_{(2i)}\ y''^{(i)}+e_{(2i)}\ y'^{(i+1)}+f_{(2i)}\ y''^{(i+1)}=g_{(2i)},$$

$$i=1,2,...,N-1,$$

(6)

де

$$a_{(2i-1)}=8[h^{(i-1)}]^{-2}, c_{(2i-1)}=12\{[h^{(i-1)}]^{-2}-[h^{(i)}]^{-2}\}, e_{(2i-1)}=-8[h^{(i)}]^{-2},$$

$$b_{(2i-1)}=[h^{(i-1)}]^{-1}, d_{(2i-1)}=-3\{[h^{(i-1)}]^{-1}+[h^{(i)}]^{-1}\}, f_{(2i-1)}=[h^{(i)}]^{-1}y''^{(i+1)},$$

$$g_{(2i-1)}=-20\{[h^{(i-1)}]^{-3}y^{(i-1)}-([h^{(i-1)}]^{-3}+[h^{(i)}]^{-3})y^{(i)}+[h^{(i)}]^{-3}y^{(i+1)}\},$$

$$a_{(2i)}=14[h^{(i-1)}]^{-3}, c_{(2i)}=16\{[h^{(i-1)}]^{-3}+[h^{(i)}]^{-3}\}, e_{(2i)}=14[h^{(i)}]^{-3},$$

$$b_{(2i)}=2[h^{(i-1)}]^{-2}, d_{(2i)}=-3\{[h^{(i-1)}]^{-2}-[h^{(i)}]^{-2}\}, f_{(2i)}=-2[h^{(i)}]^{-2},$$

$$g_{(2i)}=-30\{[h^{(i-1)}]^{-4}y^{(i-1)}+([h^{(i-1)}]^{-4}-[h^{(i)}]^{-4})y^{(i)}+30[h^{(i)}]^{-4}y^{(i+1)}\},$$

$$h^{(i)}=x^{(i+1)}-x^{(i)}.$$

Якщо помножити перше рівняння на $f_{(2i))}$ / $f_{(2i-1)}$ і відняти друге, а також перше помножити на $a_{(2i)}/a_{(2i-1)}$ і відняти друге, то матимемо систему:

$$\left.\begin{aligned} A_{(2i-1)}y'^{(i-1)}_0+B_{(2i-1)}y''^{(i-1)}_1+C_{(2i-1)}y'^{(i-1)}_0+D_{(2i-1)}y''^{(i)}_1+E_{(2i-1)}y'^{(i-1)}_0 &=G_{(2i-1)},\\ A_{(2i)}\ y''^{(i-1)}_1+B_{(2i)}\ y'^{(i)}_0+C_{(2i)}\ y'^{(i)}_1+D_{(2i)}\ y''^{(i+1)}_0+E_{(2i)}\ y''^{(i+1)}_1 &=G_{(2i)},\\ i=1,2,...,N-1. & \end{aligned}\right\}$$

(7)

Як бачимо, із (7) маємо 2(N-1) рівнянь і 2(N+1) невідомих y'_i і y''_i. Тому для розрахунку системи необхідно дозадати чотири крайові умови.

Аналіз сплайнів п'ятого степеня. За результатами дослідження можна бачити, що за допомогою сплайнів п'ятого степеня можна без будь-яких труднощів досягти другого порядку гладкості, якщо певним чином розраховувати у вузлових точках перші і другі похідні. Сплайн третього порядку гладкості можна отримати на основі (4.34). Тут бачимо, що якщо адекватним чином розрахувати $\boldsymbol{y'^{(i)}}$, то система (4.101) перетворюється у систему із трьохдіагональною перевагою. Причому ця перевага більша, ніж у кубічних сплайнах. Звідси можна зробити висновок, що сплайни п'ятого степеня досягають третій порядок гладкості краще, ніж кубічні сплайни другого порядку гладкості (дивись рис.1).

Сплайн четвертого порядку гладкості забезпечується системою (7). На жаль , аналітично проаналізувати її достатньо складно, тому наведемо тестовий приклад на рис. 4. Із тестового прикладу бачимо, що цей сплайн достатньо стійкий, має затухаючі осциляції, які декілька більші, ніж у кубічного сплайну. Ці сплайни задають другий порядок гладкості. Бачимо, що сплайн п'ятого степеня менш за все утворює осциляції.

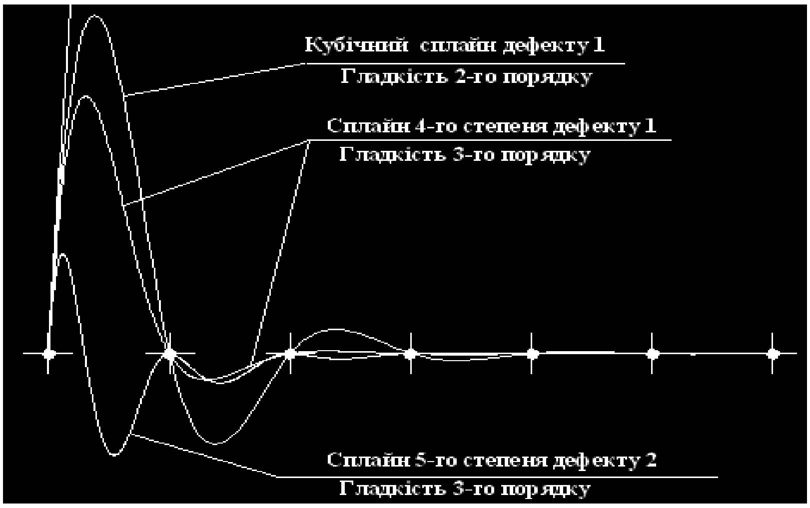

Рисунок 1 - Порівняльний аналіз сплайна 5-го степеня.

Висновки. Сплайн на основі поліному п'ятого степеня дає змогу отримувати локальний сплайн із другим порядком гладкості, що є перевагою перед кубічними сплайнами. Сплайни п'ятого степеня дають змогу отримувати криву до четвертого порядку гладкості включно. При цьому розв'язання необхідних систем лінійних рівнянь в багатьох випадках є стійким і однозначним. При заданні третього і четвертого порядку гладкості сплайни п'ятої степені також мають властивості до затухання небажаних коливань. В порівнянні із сплайнами третього степеня сплайни п'ятого степеня мають ще більший коефіцієнт затухання коливань (осциляцій).

 ISSN 1562-9945

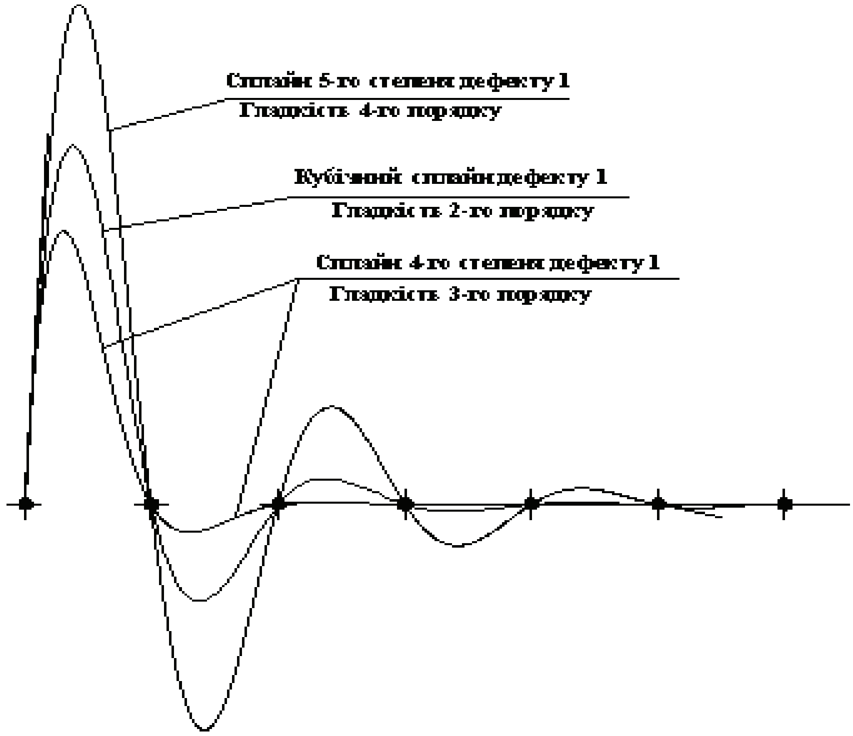

Рисунок 2 - Порівняльний аналіз сплайна 5-го степеня із четвертим порядком гладкості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.И. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976.- 248с.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций. - М.:Наука,1990. - 246с.
3. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Інтерполяція поліноміальними сплайнами п'ятого степеня. // Проблеми сучасного підручника: Збірник наукових праць – Бердянськ.: БДПУ, 2004. – С. 14-17.
4. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Порівняльні характеристики поліноміальних сплайнів третього і четвертого степенів // Прикладна геометрія та іненерна графіка. Праці / Таврійська держ. агротехн. Академія. – Вип 4. - Том 28. - Мелітополь: ТДАТА, 2004. - С. 70-74.

Получено 18.03.2006 г.