

Л.Н.Куценко, И.Ю.Адашевская, В.М.Шатохин

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ КОЛЕБАНИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

Постановка проблемы. Маятниковые колебательные системы широко используются в конструкциях молотилок, морских бакенов, развлекательных аттракционов, виброгасителей и т. п. Среди таких устройств наибольший интерес представляет многозвенные маятники [1]. Поэтому актуальными будут разработки в области алгоритмического обеспечения программ моделирования колебаний многозвенного маятника, позволяющие изучать аналогичные процессы путем визуализации фазовых портретов, а также при помощи анимационного моделирования взаимного положения звеньев маятника.

Анализ последних исследований. Для описания колебаний маятника используют уравнение Лагранжа 2-го рода $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$ ($i=1,2,3, \dots$); здесь u'_i - производные по времени t от обобщенных координат $u_i(t)$, и где обозначено $L = K - P$ (K - кинетическая энергия, P - потенциальная энергия) [2, 3]. Однако в случае нестандартных маятниковых систем, например, для «магдебургского» либо «коромыслового» маятника, представляет определенные сложности этап составление уравнений Лагранжа. Исключить ошибки на этом этапе можно путем использования автоматических способов синтеза подобных уравнений. Известны способы решить указанную задачу, например, в среде MatLab в разделе Simulink, однако полученные выражения отличаются от привычного формульного вида. Это повлияло на то, что в качестве математического пакета для синтеза дифференциальных уравнений был выбран математический процессор Maple [3, 4].

Формулировка целей статьи. Для среды процессора Maple необходимо разработать метод автоматического синтеза системы дифференциальных уравнений Лагранжа (на примере описания колебаний маятника), составить программу ее решения по заданным начальным условиям, а также построить фазовые портреты на основе полученных решений.

Основная часть. Рассмотрим двойной маятник (рис. 1), состоящий из стержней длины L_1 и L_2 , на которые в точках A и B прикреплены шары с массами m_1 и m_2 . Обобщенными координатами выберем углы $u(t)$ и $v(t)$.

Тогда положения грузов будет описываться четырьмя тождествами:

$$\begin{aligned}x_A &= L_1 \sin u; \quad y_A = L_1 \cos u; \\x_B &= x_A + L_2 \sin v; \quad y_B = y_A + L_2 \cos v.\end{aligned}$$

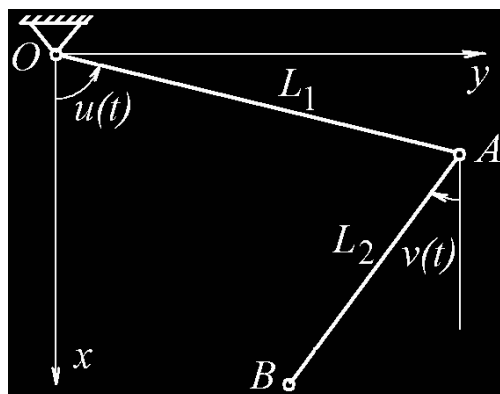


Рисунок 1 – Схема двойного маятника

Описание колебаний двойного маятника при условии отсутствия диссипативных сил осуществим на основе уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0,$$

(1)

где u' и v' - производные от обобщенных координат u и v ; $L = K - P$.

Кинетическую энергию системы маятников определим в виде

$$K = \frac{m_1(x_A'^2 + y_A'^2)}{2} + \frac{m_2(x_B'^2 + y_B'^2)}{2},$$

(2)

а потенциальную энергию выразим через обобщенные силы

$$P = -9,8(m_1 + m_2)y_A - 9,8m_2y_B.$$

(3)

Для автоматического формирования (синтеза) системы уравнений Лагранжа используем Maple-оператор **subs (X=A,B)**, позволяющий в выражении B заменить подвыражение X на выражение A .

В результате выполнения операторов языка Maple получим последовательность формул:

$$\begin{aligned}dT_U &:= \text{subs}(W = \text{diff}(u(t), t), \\ &\text{diff}(\text{subs}(\text{diff}(u(t), t) = W, K), W)); \\ dT_U &:= m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + m2 L1 L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(-u(t) + v(t)) + m2 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \\ dT_V &:= \text{subs}(W = \text{diff}(v(t), t), \\ &\text{diff}(\text{subs}(\text{diff}(v(t), t) = W, K), W));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dT_V &:= m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \cos(-u(t) + v(t)) + m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \\
 dT_U_{dt} &:= \text{diff}(dT_U, t); \\
 dT_U_{dt} &:= m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m2 L1 L2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(-u(t) + v(t)) \\
 &\quad - m2 L1 L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(-u(t) + v(t)) \left(-\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) + m2 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \\
 dT_V_{dt} &:= \text{diff}(dT_V, t); \\
 dT_V_{dt} &:= m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L2 \cos(-u(t) + v(t)) \\
 &\quad - m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \sin(-u(t) + v(t)) \left(-\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) + m2 L2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
 dP_U &:= \text{subs}(W=u(t), \text{diff}(\text{subs}(u(t)=W, P), W)); \\
 dP_U &:= 9.8 (m1 + m2) L1 \sin(u(t)) + 9.8 m2 L1 \sin(u(t)) \\
 dP_V &:= \text{subs}(W=v(t), \text{diff}(\text{subs}(v(t)=W, P), W)); \\
 dP_V &:= 9.8 m2 L2 \sin(v(t)) \\
 dT_U_ &:= \text{subs}(W = u(t), \text{diff}(\text{subs}(u(t)=W, K), W)); \\
 dT_U_ &:= m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(-u(t) + v(t)) \\
 dT_V_ &:= \text{subs}(W = v(t), \text{diff}(\text{subs}(v(t)=W, K), W)); \\
 dT_V_ &:= m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(u(t) - v(t))
 \end{aligned}$$

В итоге приходим к результирующей системе уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 ODE1 &:= dT_U_{dt} + dP_U - dT_U_; \\
 ODE1 &:= m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m2 L1 L2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(-u(t) + v(t)) \\
 &\quad - m2 L1 L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(-u(t) + v(t)) \left(-\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) \\
 &\quad + m2 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + 9.8 (m1 + m2) L1 \sin(u(t)) + 9.8 m2 L1 \sin(u(t)) \\
 &\quad - m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(-u(t) + v(t)) \\
 ODE2 &:= dT_V_{dt} + dP_V - dT_V_; \\
 ODE2 &:= m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L2 \cos(-u(t) + v(t)) \\
 &\quad - m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \sin(-u(t) + v(t)) \left(-\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_2 L_2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + 9.8 m_2 L_2 \sin(v(t)) \\
& + m_2 L_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(-u(t) + v(t))
\end{aligned}$$

Полученную систему уравнений Лагранжа будем решать численно, предварительно задав начальные условия, например:

```
initial:={u(0)=Pi, D(u)(0)=0, v(0)=Pi, D(v)(0)=0};
```

В результате численного решения системы при помощи оператора

```
dsol := dsolve({ODE1,ODE2} union initial,
numeric, method=rkf45, output=listprocedure);
```

приходим к «процедурной» форме описания искомым функций $u(t)$ и $v(t)$ и их производных:

$$\begin{aligned}
dsol := & \left[t = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), u(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\
& \frac{d}{dt} u(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), v(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \\
& \left. \frac{d}{dt} v(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) \right]
\end{aligned}$$

Этот вид решения на практике является весьма удобным, поскольку появляется возможность оперировать с функциями $u(t)$ и $v(t)$ и их производными в режиме «псевдоаналитики», т.е. работать с найденными решениями как с аналитическими формулами.

При этом не составляет труда построить фазовые портреты. Например, на рис. 2 для $L_1=0,2$; $L_2=0,1$; $m_1=1$ и $m_2=1$ представлены фазовые портреты, показывающие зависимость производной $du(t)/dt$ от угла $u(t)$ (а), и производной $dv(t)/dt$ от угла $v(t)$ (б).

Кроме того, используя торовую систему координат (рис. 3а), можно определить количество «переворотов» свободного звена двойного маятника. Для этого необходимо изобразить поверхность тора (рис. 3б), на которую как бы «наматывается» линия, описанная уравнениями

$$\begin{aligned}
x &= (L_1 + L_2 \cos v(t)) \cos u(t), & y &= (L_1 + L_2 \cos v(t)) \sin u(t) & \text{и} \\
z &= L_2 \sin v(t).
\end{aligned}$$

Тогда количество витков «намотки» будет указывать на количество оборотов свободного звена двойного маятника.

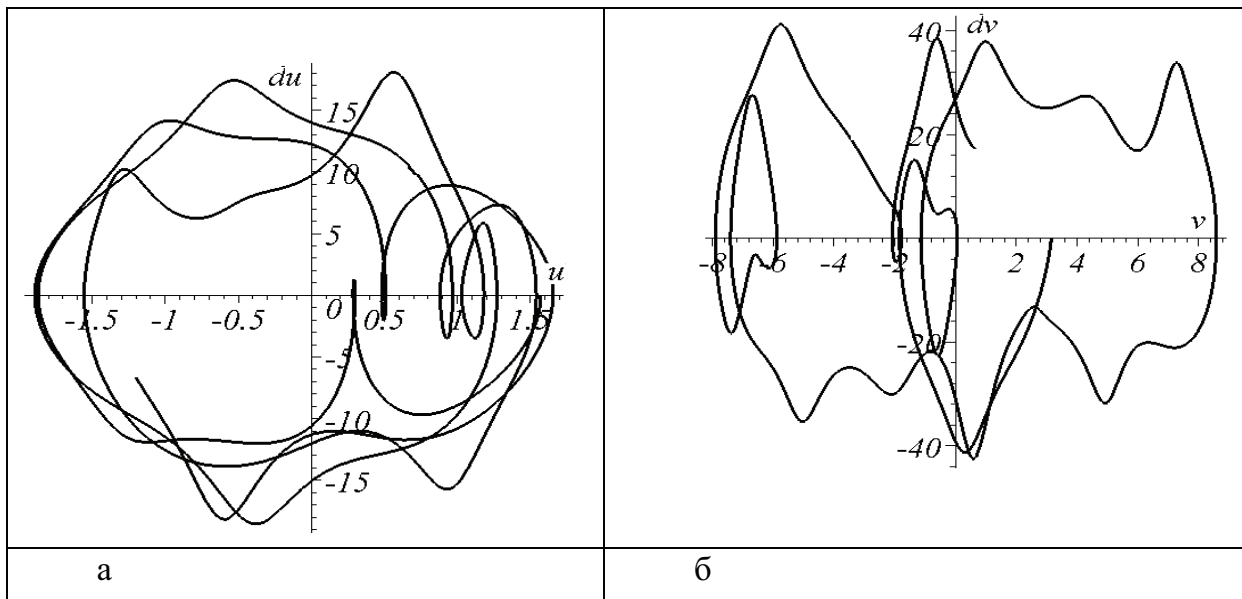


Рисунок 2 – Фазовые портреты для функций $u(t)$ и $v(t)$ обобщенных координат двойного маятника

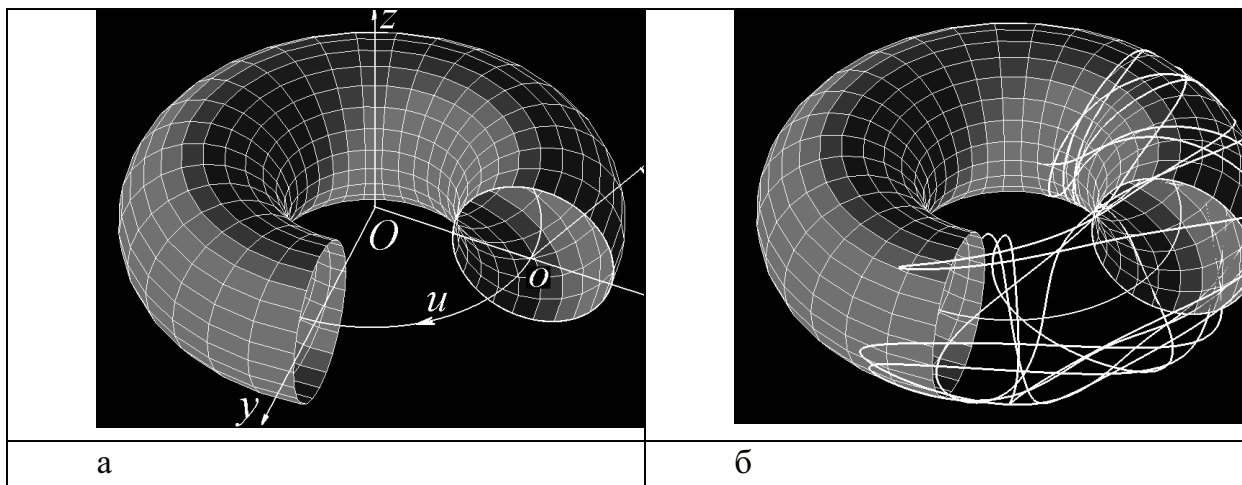


Рисунок 3 – Количество оборотов свободного звена

двойного маятника равно количеству витков линии на торе

Выводы. Осуществить автоматический синтез системы дифференциальных уравнений возможно средствами операторов процессора Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. - 400 с.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука. 1969.
3. Гладков С.В. Компьютерное моделирование колебаний «Хаотического маятника» Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 17 с.
4. Васильев А.Н. Maple 8. М.: «Вильямс», 2003. – 352 с.

Получено 25.03.2006 г.