УДК 515.2

В.М. Комяк, О.М. Соболь

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ РОЗБИВАННЯ З УРАХУВАННЯМ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РІВНОМІРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ТОЧКОВІЙ МНОЖИНІ

Постановка проблеми. Значний клас важливих практичних задач оптимізації може бути зведеним до задач оптимального розбивання заданої точкової множини на відповідні підмножини. Це й задачі територіального планування сфери обслуговування [1], задачі розподілу посівних угідь, задачі, що виникають при плануванні територіально розподілених підсистем сфери цивільного захисту і т. ін. Тому моделювання вищенаведених задач розбивання є актуальною проблемою сьогодення.

Аналіз останніх досліджень. Математичним методам оптимального розбивання множини присвячено праці О.М. Кисельової, наприклад [1, 2]. Але в даних роботах задача оптимального розбивання розглядається в математичній постановці і не розглядається як задача геометричного проектування. В роботах Ю.Г. Стояна та його учнів, наприклад [3, 4], зазначено, що до класу задач геометричного проектування, тобто до задач, пов'язаних із перетворенням геометричної інформації, належать задачі розміщення, покриття та розбивання. Але задачі оптимального розбивання як задачі геометричного проектування також не розглядалися. В зв'язку з цим, моделювання задач розбивання з урахуванням геометричних властивостей множини та підмножин розбивання є актуальним.

Постановка завдання. Нехай задана деяка множина S_0 у просторі R^2, яка у загальному випадку є неопуклою та багатозв'язною і являє собою φ - об'єкт [3]. На цій множині розповсюджена рівномірна характеристика $f(x,y)=A$, $(A=const)$, яка в інтегральному вигляді для i-тої підмножини може бути записана наступним чином:

$$M_i = \iint_{S^i} f(x,y)\,dxdy = A\cdot S^i, \qquad (1)$$

де S^i - площа i - тої підмножини.

Введемо на i-тій підмножині наступну функцію:

$$\xi_i(S_i) = S^i - S^{i1}, \qquad (2)$$

де S^{i1}- задана площа i - тої підмножини.

Необхідно розбити задану множину (рис. 1) на підмножини S_i, $i=1,\ldots,n$, таким чином, щоб функція мети досягала свого екстремального значення, підмножини не перетиналися, будь яка точка множини S_0 належала певній підмножині S_i, та виконувалася наступна умова:

$$\xi_i\left(S_i\right)=0. \tag{3}$$

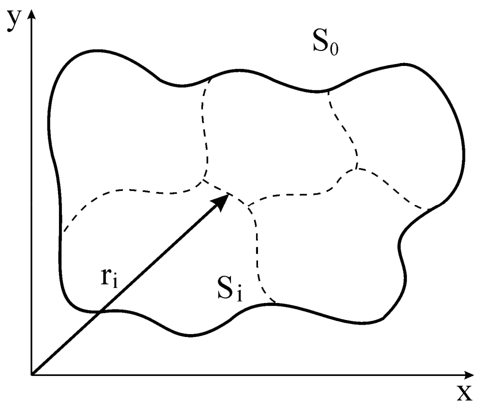

Рисунок 1

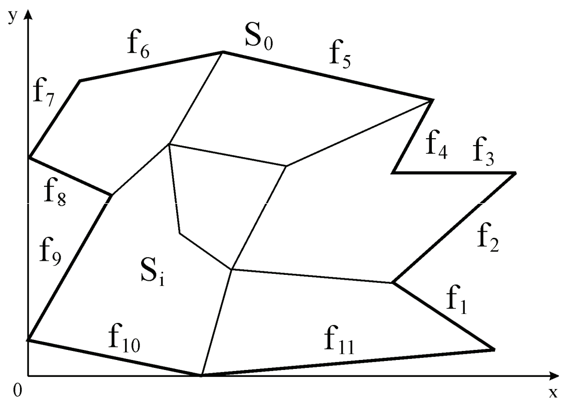

Рисунок 2

Необхідно зазначити, що у подальшому множина S_0 розглядається з кусочно-лінійною границею.

Основна частина. Математична модель для даної задачі розбивання наведена в роботі [5]. Область припустимих рішень є обмеженою та неперервною. Розглянемо метод розв'язання задачі.

Як правило, значна кількість методів мінімізації цільової функції є пов'язаною з визначенням початкового наближення до локального мінімуму. Для визначення початкового наближення в задачах розбивання точкової множини на підмножини будемо використовувати дерево розв'язків, яке для множини, наведеної на рис. 2, має наступний вигляд:

$$
\begin{array}{ll}
S_1: & \begin{array}{l} f_1,\ldots,f_{11,}\left(f_1,f_2\right),\ldots,\left(f_{11},f_1\right),\ldots,\left(f_{11},f_1,\ldots,f_{10}\right) \\ f_1,\ldots,f_{11,}\left(f_1,f_2\right),\ldots,\left(f_{11},f_1\right),\ldots,\left(f_{11},f_1,\ldots,f_{10}\right) \end{array} \\
S_2: & \begin{array}{l} f_1',\ldots,f_l',\left(f_1',f_2'\right),\ldots,\left(f_l',f_1'\right),\ldots,\left(f_l',f_1',\ldots,f_{l-1}'\right) \\ f_1',\ldots,f_l',\left(f_1',f_2'\right),\ldots,\left(f_l',f_1'\right),\ldots,\left(f_l',f_1',\ldots,f_{l-1}'\right) \end{array} \\
\vdots &
\end{array}
$$

$$S_0'=S_0\setminus S_1,\ \ldots$$

На рівнях дерева для підмножини S_i записуються сторони та комбінації сторін «поточної» множини розбивання, тобто для підмножини S_1 «поточною» є множина S_0, для підмножини S_2 - $S_0' = S_0 \setminus S_1$, і. т.д., тобто йде процес послідовної побудови всіх підмножин. Таким чином, побудова i - тої підмножини розбивання здійснюється так, щоб цільова функція для цієї підмножини досягала свого локального мінімуму. Слід зауважити, що наведене дерево розв'язків дозволяє отримати всі можливі підмножини розбивання, що задовольняють вимогам задачі.

Після вибору елементів дерева розв'язків, що відповідають підмножині S_i, початкове наближення до локального мінімуму цільової функції можна отримати за допомогою наступних гіпотез:

Гіпотеза 1. Кожна підмножина має одну «внутрішню» вершину, тобто вершину, що належить «поточній» множині розбивання (S_0, S_0', ...).

Гіпотеза 2. Для визначення «внутрішньої» вершини P (рис. 3) використовується наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_i\left(S^i\right) = 0; \\ r_i' - r_i'' = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

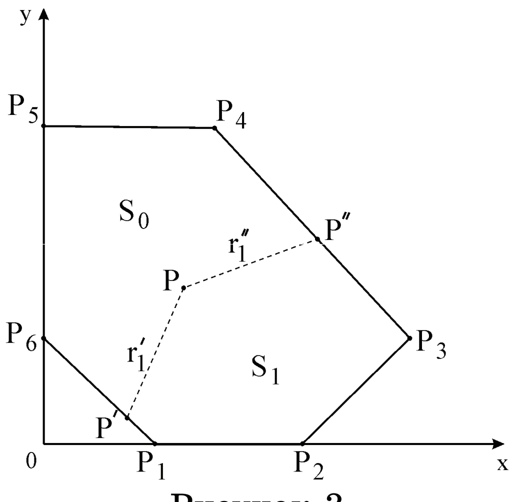

Рисунок 3

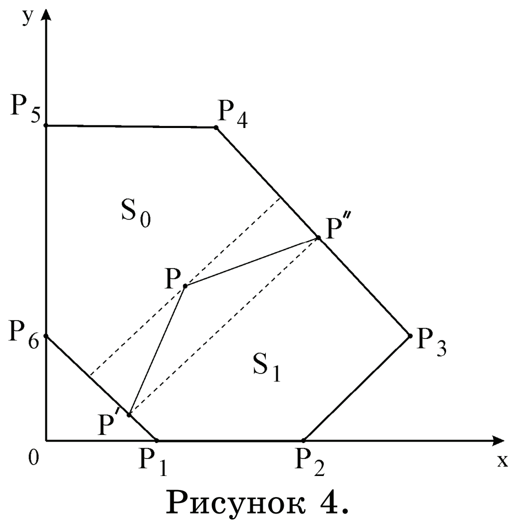

Рисунок 4.

Надалі можна записати модифіковану цільову функцію, використовуючи штрафні та бар'єрні функції [6], та звести задачу пошуку локального мінімуму до послідовності задач безумовної мінімізації модифікованої цільової функції одним з відомих методів, наприклад, методом Ньютона або квазіньютонівськими методами. Але такий підхід є неефективний в зв'язку з наступними причинами:

- модифікована цільова функція може бути дуже громіздкою і необмеженою знизу, що призводить до використання значних обчислювальних ресурсів для її мінімізації;

- модифікована цільова функція може змінювати свій вигляд в процесі мінімізації (наприклад, функція у вигляді суми максимальних діаметрів підмножин розбивання), що може призвести до зациклювання методу або, навіть, до отримання неправильного розв'язку задачі.

У зв'язку з цим запропоновано використовувати підхід, що враховував би геометричні особливості задачі розбивання точкової множини.

Нехай для певної підмножини розбивання отримане початкове наближення, наведене на рис. 4. Тоді змінними цільової функція будуть координати точок $P\left(x_p, y_p\right)$, $P^{'}\left(x_{p^{'}}, y_{p^{'}}\right)$ та $P^{''}\left(x_{p^{''}}, y_{p^{''}}\right)$. Переміщення точок $P^{'}$ та $P^{''}$ обмежено, відповідно, відрізками P_6P_1 та P_3P_4. Точка P переміщується уздовж прямої, що паралельна $P^{'}P^{''}$ і обмежена сторонами P_6P_1 та P_3P_4. Отже, кількість змінних із 6-ти зменшується до 3-х. Здійснюючи переміщення точок P, $P^{'}$ та $P^{''}$ вздовж відповідних відрізків, необхідно локалізувати інтервал знаходження мінімуму цільової функції і застосовувати, наприклад, метод золотого перерізу [6]. Таким чином, задачу мінімізації цільової функції з 3-ма змінними можна звести до 3-х задач одномірної безумовної мінімізації, що розв'язуються паралельно.

В результаті проходження по певній гілці дерева розв'язків, отримуємо наближення до локального мінімуму цільової функції для системи побудованих підмножин (як наслідок послідовної побудови підмножин). Після перебору всіх гілок дерева розв'язків отримуємо множину наближень до локальних мінімумів, із якої обираємо мінімальне значення.

Необхідно відзначити, що наведений метод розв'язання є достатньо універсальним, тобто цільова функція може бути як лінійною, так і нелінійною, гладкою або негладкою. Також при використанні наведеного методу не відбувається зациклювання.

На основі розробленого методу було створене програмне забезпечення в середовищі Delphi (цільова функція – сума максимальних діаметрів підмножин).

Висновки. В даній роботі розглянуто моделювання задач розбивання з урахуванням розповсюдження рівномірних характеристик на точковій множині. Наведені результати свідчать про необхідність розробки методів пошуку локального мінімуму цільової функції для системи підмножин, побудованої під час проходження по певній гілці дерева розв'язків. Перебір отриманої множини локальних мінімумів дозволить визначити глобальний мінімум цільової функції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Киселева Е.М. Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения. – Днепропетровск: ДГУ, 1982. – 108 с.
2. Киселева Е.М. Решение одной задачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. - 1989. - № 5.
3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К: Наукова думка, 1986. – 268с.
4. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др. Элементы геометрического проектирования. – К: Наукова думка, 1995. – 240 с.
5. В.М. Комяк, О.М. Соболь. Математична модель задачі розбивання множини на підмножини з урахуванням обмежень у вигляді рівностей та нерівностей // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(22). – Херсон: ХНТУ. – 2005. – С. 152-156.
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

Получено 16.03.2006 г.

УДК 76: 515.2

И.А.Кузнецова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВІЗУАЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ ОБЪЕКТОВ ДИЗАЙНА, ДЕКОРАТИВНО-ПРИКЛАДНОГО И ИЗОБРАЗИТЕЛЬНОГО ИСКУССТВА

Постановка проблемы и ее связь с важными научными или практическими заданиями. Изменение визуального восприятия любых объектов с течением времени требует изменения основополагающих концепций, лежащих в основе создания дизайн- проектов,