УДК 577.4:502.7:631.32

А.И. Караев, В.В.Кузьминов

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ УРОВНЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Постановка проблемы. При построении линий уровня на поверхностях земельных участков существующими методами возникает погрешность, которая приводит к снижению точности определения координат водотоков и водоразделов. Известные методы построения линий уровня допускают погрешность, сравнимую с шагом координатной сетки для определения аппликат. Для обеспечения точности, необходимой для практических целей, нужно выполнить слишком большой объем измерений, что связано со значительными затратами трудовых ресурсов. В связи с этим возникает необходимость разработки способа повышения точности построения линий уровня.

Анализ последних исследований. В работе [1] нами был описан алгоритм метод построения линий уровня, который заключается в следующем. Положим, что проекция Q_H исследуемого участка поля на горизонтальную площадь имеет форму прямоугольника длиной *a* и шириной *b*. На данной проекции построена равномерная прямоугольная сетка S, в узлах которой получены аппликаты при помощи GPS системы[1]. Метод построения ломаной линии, приближенно представляющей линию уровня, основан на следующем утверждении.

Утверждение. Пусть в декартовой системе координат заданы (рис. 1):

- поверхность Q, которая описывается уравнением z=f(x,y), где f(x, y) – непрерывная функция;

- линия уровня g, полученная в результате пересечения поверхности Q с секущей плоскостью, имеющей уравнение z=h;

- отрезок $A_1 A_2$ на плоскости xOy.

Проекцию линии уровня g на плоскость xOy обозначим g_H.

Достаточное условие пересечения проекции g_H линии уровня g с отрезком A_1A_2 может быть записано в виде:

[1] GPS (Global Positioning System) – система, предназначенная для навигационных измерений [2]

$$\left(f\big|_{A_1} - h\right)\cdot\left(f\big|_{A_2} - h\right) \le 0$$

Координаты вершин искомой ломаной находятся следующим образом. Сначала по периметру исследуемого участка на основании утверждения находятся отрезки, которые пересекаются с искомой линией уровня. Координаты точек пересечения находятся методом линейной интерполяции. Каждому из таких отрезков A_1A_2 соответствует конечное множество отрезков на сетке, которое зависит от места расположения отрезка A_1A_2 на сетке S. Из этого множества выбирается тот из отрезков, который содержит точку пересечения с искомой линией уровня. Построение ломаной завершается, если отсутствуют отрезки сетки S, смежные отрезку A_1A_2 и пересекающиеся с линией уровня.

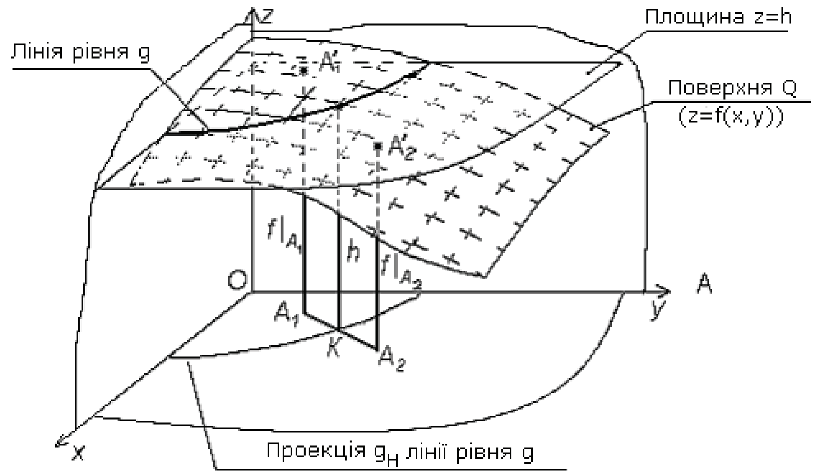

Рисунок 1 – Графическая иллюстрация утверждения

Цель исследований. Обоснование рабочей гипотезы разработки способа, повышающего точность метода построения линий уровня и учитывающего стохастичность поверхности почвы.

Основная часть. Найдем погрешность вычислений координат линий уровня вышеизложенным методом при наложенном ограничении на величину уклона поверхности почвы в произвольной точке $|tg\alpha| \le t$. Пусть исследуется отрезок A_1A_2 длины τ (рис. 2).

Положим, что $z(A_2)>z(A_1)$, и введем декартову систему координат $x'Oz'$ таким образом, что точка A_1 – окажется в начале координат, ось Ox' - расположена горизонтально и совпадает с направлением проекции A_1A_2 на горизонтальную плоскость. Поверхность почвы пересекается плоскостью $x'Oz'$ по некоторой кривой m.

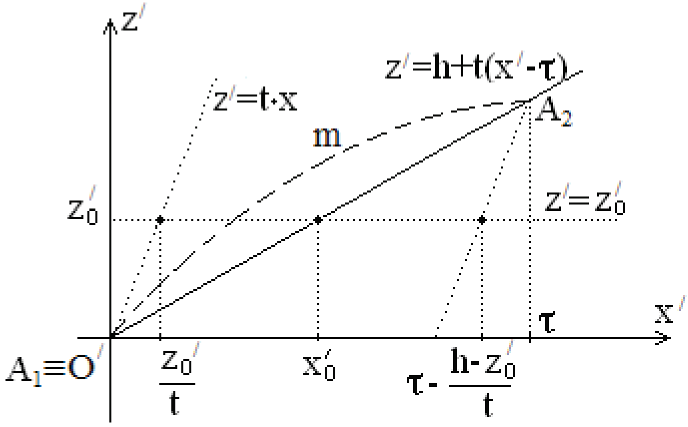

Рисунок 2 – К выводу максимальной абсолютной погрешности линейной
интерполяции

Пусть $z(A_2)$- $z(A_1)=h$. Определим максимальную погрешность Δx, которую можно допустить при определении абсциссы $x_0^{/}$ точки линии уровня, имеющей в данной системе координат аппликату $z_0^{/}$. Координата вершины ломаной, аппроксимирующей линию уровня, вычисленная методом линейной интерполяции, равна $x_0' = \tau \frac{z_0^{/}}{h}$. Так как во всех точках кривой m уклон удовлетворяет ограничению $|tg\alpha| \le \tau$, то кривая обязательно окажется в одной полуплоскости с A_2 относительно прямой $z^{/} = t \cdot x^{/}$, поэтому минимальным возможным значением для $x_0^{/}$ будет $\frac{z_0^{/}}{t}$. На том же основании кривая m окажется в одной полуплоскости с A_1 относительно прямой $z^{/} = h + t \cdot (x^{/} - \tau)$, а максимально возможным значением $x_0^{/}$ будет $\tau - \frac{h - z_0^{/}}{t}$.

Тогда погрешность определения координаты вершины ломаной будет удовлетворять неравенству:

$$\Delta x \le \max\left(\frac{\tau \cdot z_0^{/}}{h} - \frac{z_0^{/}}{t}, \tau - \frac{h - z_0^{/}}{t} - \frac{\tau z_0^{/}}{h}\right) = \max\left(z_0^{/}\left(\frac{\tau}{h} - \frac{1}{t}\right), \tau - \frac{h}{t} - z_0^{/}\left(\frac{\tau}{h} - \frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= \max\left(\frac{z_0^{/}}{h}\left(\tau - \frac{h}{t}\right), \left(\tau - \frac{h}{t}\right) \cdot \left(1 - \frac{z_0^{/}}{h}\right)\right)$$

 ISSN 1562-9945

Очевидно, что эта величина наименьшая при $z_0' = \frac{h}{2}$: $\Delta x \le \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{h}{t}\right)$, и наибольшая при $z_0' \to 0$ или $z_0' \to h$, при этом $\Delta x \le \tau - \frac{h}{t}$. Таким образом, метод гарантирует точность

$$\Delta x \le \tau - \frac{h}{t} \ . \tag{1}$$

Приведем численный пример расчета погрешности метода построения линий уровня.

Пусть поверхность почвы задана аналитически:

$$z(x,y) = 0.7 + 0.5\left(\sqrt{(x-0.5)^2 + 0.0004} - x\right) + 0.1e^{-40(x-0.65)^2 - 40(y-0.5)^2} \ . \tag{2}$$

Зададимся координатной сеткой с шагом 0.2 (в условных единицах). Графическое отображение данной поверхности представлено на рисунке 3.

Максимальный уклон tg α в точках данной поверхности составляет t=1.

1) Рассмотрим отрезок, соединяющий точки с координатами (0;0.2;z(0;0.2)) и (0.2;0.2;z(0.2;0.2)) (на рисунке 3 –отрезок №1). Для него z(0;0.2)≈0.9502, z(0.2;0.2)≈0.7503, h=z(0;0.2)- z(0.2;0.2)≈0.1999. Максимальная ошибка по формуле (1) $\Delta x_{\max} = 0.2 - \frac{0.1999}{1} = 0.0001$.

Допустим, что необходимо найти абсциссу точки пересечения отрезка №1 и линии уровня с аппликатой 0.85. Если для ее нахождения воспользоваться методом линейной интерполяции, получим значение $x_0^* = 0.2 - \frac{0.2}{0.9502 - 0.7503} \cdot (0.85 - 0.7503) \approx 0.10025$. Значение абсциссы x_0 точки поверхности, имеющей ординату y=0.2 и аппликату z=0.85, вычислим, решив уравнение $z(x_0;0.2)=0.85$, где z(x,y) - находится по формуле (2). Решение получено с помощью программной оболочки Maple V. Приближенное значение корня этого уравнения $x_0 \approx 0.10025$. Таким образом, в данном случае точность удовлетворительна для любых практических целей.

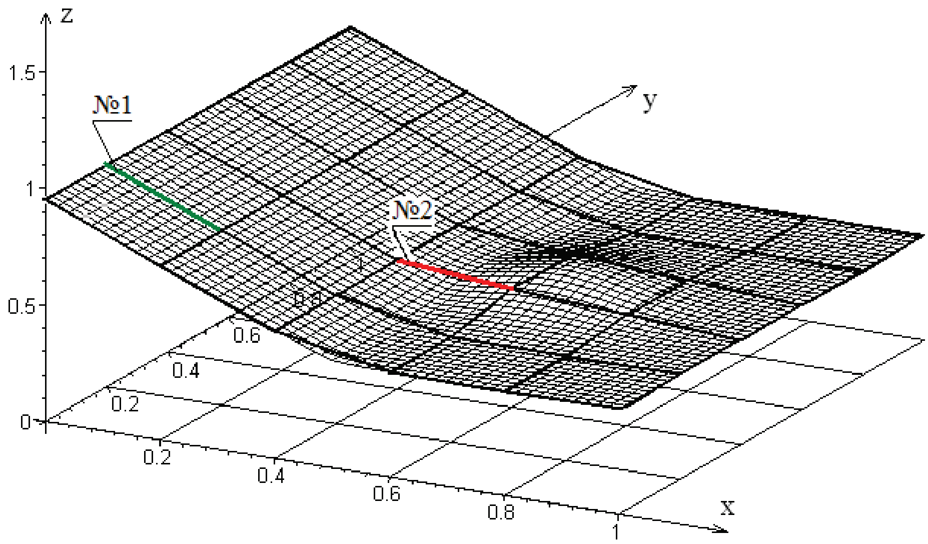

Рисунок 3 - Графическое отображение поверхности численного примера

2) Рассмотрим отрезок, соединяющий точки с координатами (0,4;0.4;z(0,4;0.4)) и (0.6;0.4;z(0.6;0.4)) (на рисунке 3 – отрезок №2). Для него z(0.4;0.4)≈0.5565, z(0.6;0.4)≈0.5116, h=z(0.4;0.4)-z(0.6;0.4)≈0.0449. Максимальная ошибка по формуле (1*) $\Delta x_{\max} = 0.2 - \frac{0.0449}{1} = 0.1551$.

Допустим, что необходимо найти абсциссу точки пересечения отрезка №2 и линии уровня с аппликатой 0.52. Значение абсциссы, вычисленное методом линейной интерполяции, равно

$$x_0^* = 0.6 - \frac{0.2}{0.5565 - 0.5116} \cdot (0.52 - 0.5116) \approx 0.5626$$

Значение абсциссы x_0 точки поверхности, имеющей ординату y=0.4 и аппликату z=0.52, вычислим, решив уравнение $z(x_0;0.4)=0.52$, где z(x,y) - находится по формуле (2). Приближенное значение корня $x_0 \approx 0.4440$. Погрешность метода в данном случае составляет 0.1186. Если предположить, что сторона участка составляет 5м, то погрешность определения абсциссы превысит 0.5 м, что значительно снижает точность определения элементов микрорельефа (водотоков и водоразделов) по таким исходным данным.

Из вида формулы (1) и приведенного численного примера следует, что на участках, в которых тангенс угла наклона отрезка A_1A_2 достаточно велик по модулю (модуль приближается к максимальному

 ISSN 1562-9945

значению t), линейная интерполяция гарантирует высокую точность нахождения координат точки линии уровня. Однако, если угол наклона отрезка A_1A_2 близок к нулю, то возможная ошибка определения координат точки линии уровня близка к шагу сетки. Для практических вычислений такой точности недостаточно, так как построение сетки с малым шагом сопряжено с большими затратами труда и времени. Поскольку поверхность почвы по своей природе не является регулярной поверхностью, а является стохастической поверхностью, повышение порядка интерполяции не гарантирует повышения точности.

Возможный способ повышения точности метода заключается в следующем. Будем считать, что координата точки пересечения линии уровня с A_1A_2 – не однозначно определенная и является стохастической величиной. Зададимся уровнем значимости γ, тогда на отрезке A_1A_2 аппликате линии уровня будет соответствовать не одна точка, а «доверительный интервал». Это означает, что с вероятностью γ точка пересечения линии уровня и отрезка A_1A_2 принадлежит этому интервалу. Таким образом, вся линия уровня будет определена областью, в которой она находится, причем площадь этой области зависит от уровня значимости γ.

Тогда алгоритм реализации рабочей гипотезы способа повышения точности метода построения линий уровня может быть представлен в вербальной форме:

1. Для каждого из отрезков, на котором точность метода неудовлетворительна, строим функцию распределения координат точки пересечения отрезка с линией уровня, считая поверхность почвы стохастической, проходящим через известные узлы. Задавшись необходимым уровнем значимости, находим на каждом из таких отрезков доверительный интервал. Сгустив соответственно кривые, соединяющие концы этих доверительных интервалов, получим доверительную область для линии уровня.

2. Если часть этих доверительных интервалов имеет большую длину, чем допустимая погрешность определения координат точек линии уровня, в этой части поверхности следует уменьшить шаг сетки в 2 раза (т. е. определить аппликаты промежуточных точек) и повторить определение доверительных интервалов с учетом вновь полученной информации.

Выводы.

1. Для получения доверительных интервалов, описанных в пункте 1 вербального алгоритма, необходимо разработать метод построения функции распределения f(x,y,z) аппликаты точки поверхности с координатами (x,y,z) по известным аппликатам в узлах прямоугольной сетки.

2. Возможный вариант построения такого метода:

1) формировании минимально достаточного множества, состоящего из равномерных координатных сеток со значениями аппликат в узлах;

2) моделировании случайной поверхности (а именно, поверхности, у которой аппликата каждой из точек является стохастической величиной), проходящей через точки с известными координатами, измеренными в узлах сетки, и удовлетворяющей требованиям непрерывности и ограниченности уклона в произвольной точке $|tg\alpha| \le t$;

3) установлении эмпирических законов распределения аппликат точек для некоторой выборочной совокупности промежуточных (неузловых) точек и выборочной совокупности случайных поверхностей;

4) установлении эмпирической зависимости закона распределения аппликаты произвольной точки от координат x и y этой точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Караєв О. Г., Кузьмінов В. В. Алгоритм побудови ліній рівня на ділянках грунтів // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Праці ТДАТА. – Вип. 4. - Том 28. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – С. 37-46.
2. Руководство пользователя GPS системы ProMark 2. – Украина: Навигационно-геодезический центр, 1997.

Получено 06.04.2006 г.