УДК 514.18

В.В. Дзюба

ІНВЕРСІЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПЛОСКИХ ТА ПРОСТОРОВИХ СІТОК

Постановка проблеми. Поверхнями із ортогональними сім'ями координатних ліній легше оперувати при їх математичному опису, оскільки середній член першої квадратичної форми дорівнює нулю. Особливе місце займають поверхні, у яких сім'ями ортогональних ліній є лінії кривини. До них зокрема відносяться торси однакового нахилу твірних, у яких однією сім'єю ліній кривини є прямолінійні твірні, а другою – ортогональні траєкторії до них. При перетворенні інверсією такі поверхні перетворюються на каналові, оскільки прямолінійні твірні переходять у кола – лінії кривини нової поверхні. Ортогональна плоска сітка перетвориться в ортогональну сітку на сфері.

Аналіз останніх досліджень. Формоутворення поверхонь на основі перетворення інверсією доцільно використовувати, якщо потрібно отримати поверхню, віднесену до сітки із ліній кривини. Перетворення інверсією циліндра, конуса тора в цикліди Дюпена показано в [1]. Деякі каналові поверхні та поверхні Іоахімсталя утворені методом інверсії в роботі [2]. В [3] розглядались питання перетворення площини, що дотикається до сфери інверсії.

Формулювання цілей статті. Запропонувати методи побудови поверхонь на основі перетворення інверсією плоских та просторових ортогональних сіток.

Основна частина. Для перетворення інверсією просторових ортогональних сіток використаємо поверхню однакового нахилу твірних, утворену напрямним еліпсом у горизонтальній площині і прямолінійними твірними із кутом нахилу β. В [4] побудовано зображення поверхні рівного нахилу, що спирається на еліпс як інтегральної поверхні диференціальних рівнянь у частинних похідних. Нами використана методика побудови наведена в праці [5].

Параметричні рівняння еліпса:

$$x = a\cos v\,;\;\; y = b\sin v\,;\;\; z = 0\,, \tag{1}$$

де a і b – велика та мала осі еліпса.

Запишемо параметричні рівняння лінійчатої поверхні [6]:

$$X = x + um\,;\;\; Y = y + ul\,;\;\; Z = z + un\,, \tag{2}$$

де $x = x(v)$, $y = y(v)$, $z = z(v)$ – рівняння напрямної кривої та її похідні; l, m, n – координати одиничного вектора, який задає напрям прямолінійної твірної в кожній точці напрямної, тобто теж є функціями параметра v; u – довжина твірної – другий змінний параметр поверхні.

В даному випадку горизонтальна проекція прямолінійних твірних поверхні буде збігатися з нормалями до напрямної кривої. Інша сім'я ортогональних ліній на горизонтальній проекції будуть складати еквідистанти до напрямної кривої. Тоді рівняння поверхні запишеться [7]:

$$X = a\cos v + u\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,;\;\; Y = b\sin v + u\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,;\;\; Z = f(u)\,. \tag{3}$$

Щоб прямолінійні твірні на площині перетворились в прямолінійні твірні торса однакового нахилу потрібно щоб залежність розподілу по висоті еквідистантних ліній $Z = f(u)$ була лінійною $Z = u\tan\beta$.

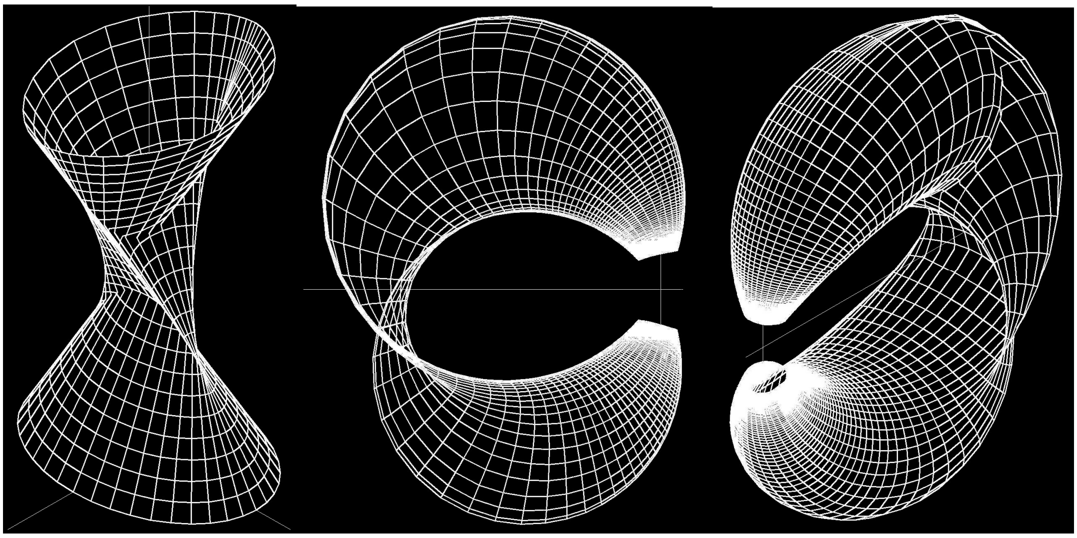
Перейдемо до одиничного напрямного вектора. Знайдемо його модуль за формулою, беручи до уваги, що $n = \tan\beta$:

$$\sqrt{m^2 + l^2 + n^2} = \sqrt{1 + tg^2\beta} = \frac{1}{\cos\beta} \tag{4}$$

Розділимо кожну проекцію напрямного вектора на його модуль. Остаточні рівняння лінійчатої поверхні однакового нахилу твірних з врахуванням (4) і співвідношення між осями $b = \sqrt{2}a$ запишуться:

$$X = a\cos v + u\frac{\sqrt{2}\cos\beta\cos v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}\,; Y = \sqrt{2}a\sin v + u\frac{\cos\beta\sin v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}\,; Z = u\sin\beta\,. \tag{5}$$

На рис. 1,а за рівняннями (5) зображено поверхню однакового нахилу твірних з напрямним еліпсом у горизонтальній площині. Здійснимо перетворення отриманої просторової сітки інверсією відносно сфери радіуса R. Отримана каналова поверхня буде віднесена до координатних ліній кривини. Розглянемо одну порожнину поверхні (5), обмежену ребром звороту [8].



а) б) в)

Рисунок 1 - Поверхня однакового нахилу твірних, побудована за напрямним еліпсом

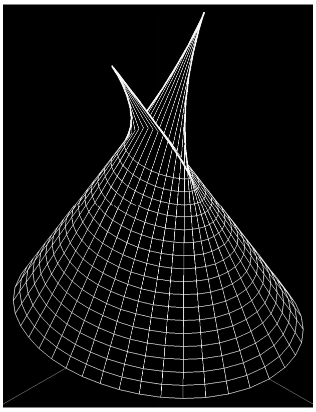
а – аксонометричне зображення поверхні; б – фронтальна проекція поверхні однакового нахилу твірних перетвореної інверсією (R=40); в – аксонометричне зображення поверхні

Горизонтальною проекцією ребра звороту для торсової поверхні однакового нахилу твірних буде еволюта напрямної кривої, що дещо спрощує його знаходження. Виключимо параметр u із двох перших рівнянь (5), як показано в [5], матимемо:

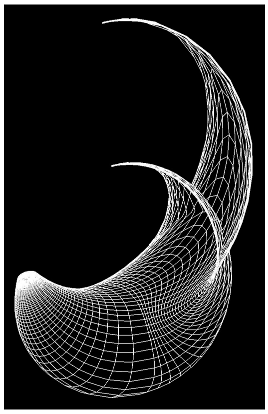
$u = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{\left(x'y'' - y'x''\right)\cos\beta}$, після підстановки частинних похідних отримаємо:

$$u = -\frac{a(1+\cos^2 t)^{3/2}}{\sqrt{2}\cos\beta}. \quad (6)$$

Підставивши (6) в (5) отримаємо рівняння ребра звороту торса однакового нахилу твірних, яке наразі обмежить лінійчату поверхню (рис. 2,а). Після перетворення інверсією отримаємо каналову поверхню (рис. 2,б) віднесену до координатних ліній кривини однією сім'єю якої будуть частини кіл, в які перетворилася сім'я прямолінійних твірних торса, іншу сім'ю будуть складати ортогональні до кіл просторові криві.



а)



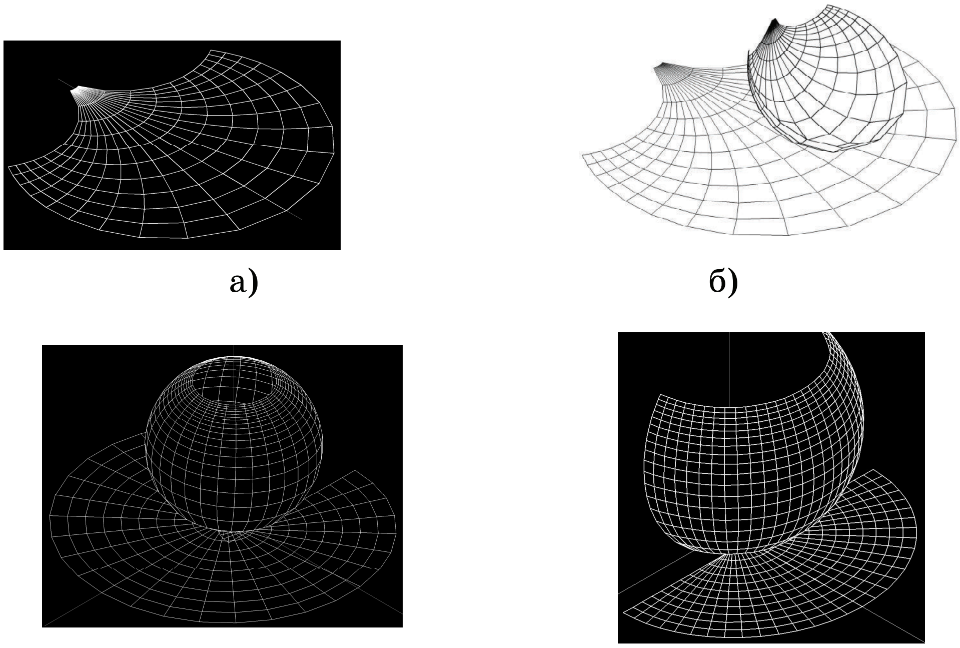
б)

Рисунок 2 - Торсова поверхня однакового нахилу твірних обмежена ребром звороту

а – аксонометричне зображення поверхні; б – аксонометричне зображення поверхні після перетворення інверсією (R=*40*)

Для перетворення інверсією плоских ортогональних сіток використаємо сітки отримані в [7, 9]. Як відомо, при перетворення інверсією плоскої сітки на площині, буде утворена сітка на відсіку сфери. Якщо однією сім'єю плоскої ортогональної сітки є прямі лінії, то після інверсії вони перетворяться в кола на сфері. Як частковий випадок, коли центр інверсії знаходиться на площині, площина відобразиться в площину а кола чи прямі які проходять через центр відобразяться в прямі. На рис. 3,а задано фрагмент плоскої ортогональної сітки двома пучками ортогональних кіл. На 3,б показано фрагмент сфери який утворюють дві сім'ї ортогональних кіл, як результат інверсії плоскої сітки. На рис 3,в та 3,г ортогональні сітки утворені однопараметричною сім'єю прямих, дотичних до певної кривої та ортогональними до них еквідистантними траєкторіями. Сім'я ліній плоскої сітки утворює сім'ю кіл на сфері інша сім'я, – евольвент, – сферичні криві – ортогональні до кіл.

Висновки. Розглянуті в статті методи формоутворення поверхонь на основі перетворення інверсією дають змогу проектувати поверхні, віднесені до ліній кривини. При перетворенні торсів однакового нахилу твірних утворюються каналові поверхні, параметризовані лініями кривини. Плоскі ортогональні сітки при перетворенні утворюють сфери, віднесені до ліній кривини. Наведені методи формоутворення дещо спрощують проектування і подальше дослідження поверхонь, оскільки ми маємо справу із спрощеними першою та дугою квадратичними формами поверхні – середні члени першої та другої квадратичної форми дорівнюють нулю.



а) б)

в) г)

Рисунок 3 - Перетворення інверсією плоских ортогональних сіток

а – плоска сітка, утворена двома сім’ями ортогональних кіл; б – інверсія плоскої сітки, утвореної сім’ями кіл; в – плоска сітка із дотичних до евольвенти кола і ортогональних траєкторій та її інверсія; г – плоска сітка із дотичних до циклоїди і ортогональних траєкторій та її інверсія

ЛІТЕРАТУРА

1. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. -Л., 1934. -332 с.
2. Скидан І.А., Улицька Н.Ю. Проблема віднесення поверхні до сітки з ліній кривини // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Том 19. Мелітополь, 2003. – С.7-14.
3. Шепелєв В.В. Відображення площини на поверхню та його застосування. Автореферат дис. к-та наук. Донецьк: Донецький нац. техн. універ. Мін. освіти і науки України, 2005. -16 с.

4. Куценко Л.М. Розв’язання диференціального рівняння ейконал // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Том 23. Мелітополь: 2004.
5. Дзюба В.В. Конструювання поверхонь на основі плоских ортогональних сіток, однією сім’єю яких є однопараметрична множина прямих // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2004.– Вип.8.- С.77-84.
6. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами. Докт. дис. – К.: Нац. аграрн. універ., 2000.
7. Пилипака С.Ф., Дзюба В.В. Методи побудови ортогональних сіток за властивостями еволют і евольвент // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Том 17. Мелітополь: 2002. – С.
8. Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф. Особливості руху матеріальної частинки по гравітаційних лінійчатих поверхнях // Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. – Вип. 21. „Механізація сільськогосподарського виробництва”. – Харків: 2003. – С. 75-87.
9. Дзюба В.В. Заміна довільної сітки в площині на ортогональну // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 194 -198.

Получено 16.03.2006 г.