

7. Глаголев Е.А., Четверухин Н.Ф. Аксонометрия: Гостехиздат технико-теоретической литературы. – М., 1953. – 292 с.
8. Первикова В.Н. Теоретические основы построения чертежей многомерных фигур в синтетическом и векторном изображении с применением для исследования многомерных систем // Автореф. дис...докт.техн.наук. – М., 1974. – 31с.
9. Первикова В.Н. Геометрические основы чертежей многомерных фигур // Учебное пособие. М.: МАИ, 1982. – 44 с.
10. Юдицкий М.М. Специальные виды аксонометрических проекций // Автореф. дис. ... докт.техн. наук. – М., 1969. – 25с.
11. Гумен Н.С. Графоаналитическое отображение некоторых геометрических образов многомерного евклидова пространства на подпространствах низших размерностей применительно к решению некоторых технических задач / Дисс. ... канд. техн. наук. – Киев, 1969. – 272 с.

Получено 25.03.2006 г.

УДК 515.2

Д.В. Давиденко, Д.В. Кукуруза

МЕТОД ЗВЕДЕННЯ ПОЗИЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ДО МЕТРИЧНОЇ

Постановка проблеми. При розв'язанні різноманітних проблем в галузі машинобудування, робототехніки або будівництва часто виникає наступна позиційна задача [1-3].

Задача А. Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано дві точки $A(x_a, y_a, z_a)$ і $B(x_b, y_b, z_b)$, а також геометричний об'єкт G , поверхню якого можна описати рівнянням $F(x, y, z) = 0$ (наприклад, це можна зробити за допомогою R -функцій [1]). Необхідно з'ясувати, чи видимою є точка B із точки A ? Тобто заслоняє чи не заслоняє об'єкт S "промінь зору", який спрямовано із точки A в точку B ?

Спосіб розв'язання цієї задачі суттєво впливає на ефективність методу розв'язання проблеми в цілому [1 - 3].

Аналіз останніх досліджень. Відомі способи розв'язання задачі A базуються, як правило, на методах аналітичної геометрії, які дозволяють визначати відстані від „пробної” точки на промені зору до поверхні об'єкта [1-3]. Але такого роду „перебірні” алгоритми приво-

дять до значного часу обробки інформації, внаслідок чого розв'язок зазначеної позиційної задачі не завжди можна одержати в реальному часі.

© Д.В. Давиденко, Д.В. Кукуруза, 2006

В алгоритмах „позиціювання” виходом може бути застосування аналітичних виразів для нормальних функцій [4]. Для складання ефективних алгоритмів пропонується замінити позиційну задачу А наступною метричною задачею Б.

Задача Б. Необхідно визначити найкоротшу відстань $\rho(G, L)$ між об'єктом $G: F(x, y, z) = 0$ і відрізком $L\{A, B\}: f(x, y, z) = 0$. Тоді, у випадку виконання нерівності $\rho(G, L) > 0$, точка B буде видимою із точки A , тобто об'єкт G не заслонятиме "промінь зору", спрямований із точки A в точку B .

Визначення [4]. Для об'єкта G нормальною називається така функція $F(x, y, z)$, для якої виконується тотожність $F(x_a, y_a, z_a) = \rho(G, A)$ для довільної точки $A(x_a, y_a, z_a)$ за межами об'єкта G . Тут через $\rho(G, A)$ позначено найкоротшу відстань між поверхнею об'єкта G і точкою A . При цьому вираз $F(x, y, z) = 0$ буде рівнянням поверхні G .

Постановка завдання. Запропонувати спосіб розв'язання метричних і позиційних задач з використанням нормальних функцій.

Основна частина. Для розв'язання задачі Б необхідно скласти нормальні рівняння двох об'єктів: відрізка L , що сполучає точки A і B – позначимо його як $f(x, y, z) = 0$, і об'єкта G – позначимо його як $F(x, y, z) = 0$. Тоді задачу А можна формулювати як задачу Б, прийнявши до уваги наступне твердження.

Твердження 1. Найкоротша відстань $\rho(G, L)$ між об'єктами G і L дорівнює подвоєному значенню мінімуму R - диз'юнкції $f = f_1 \vee f_2$ нормальних функцій, які входять до опису цих об'єктів.

Наведемо деякі відомі нормальні функції об'єктів.

Твердження 2. Нормальна функція відрізка, що з'єднує в прямокутній системі координат $Oxyz$ точки $A(x_a, y_a, z_a)$ і $B(x_b, y_b, z_b)$, має вигляд

$$\xi = \sqrt{\frac{(f_a \wedge 0)^2 + (f_b \vee 0)^2 + \omega^2}{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}}, \quad (1)$$

де $f_a = (x_b - x_a)(x - x_a) + (y_b - y_a)(y - y_a) + (z_b - z_a)(z - z_a)$;

$$f_b = (x_b - x_a)(x - x_b) + (y_b - y_a)(y - y_b) + (z_b - z_a)(z - z_b);$$

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ x_a & z_a & 1 \\ x_b & z_b & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_a & z_a & 1 \\ y_b & z_b & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Знаками \vee і \wedge тут і далі позначено R_1 -диз'юнкцію і R_1 -кон'юнкцію [4].

Твердження 3. Нормальна функція для паралелепіпеда $T \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$ має вигляд

$$\xi = \sqrt{[(x \vee a) - (x \wedge b)]^2 + [(y \vee c) - (y \wedge d)]^2 + [(z \vee e) - (z \wedge f)]^2}. \quad (2)$$

Функція (2) буде нормальною і у випадку загального положення паралелепіпеда стосовно координатних площин. Крім того, паралельні грані можуть збігатися. Зазначимо, що у випадку злиття двох пар граней, одержимо функцію з властивостями функції (1).

На рис. 1 при $\xi = 0.05$ і $\xi = 1.5$ зображено поверхні рівня нормальної функції паралелепіпеда $T \{2 \leq x \leq 5; 3 \leq y \leq 5; 2 \leq z \leq 3\}$.

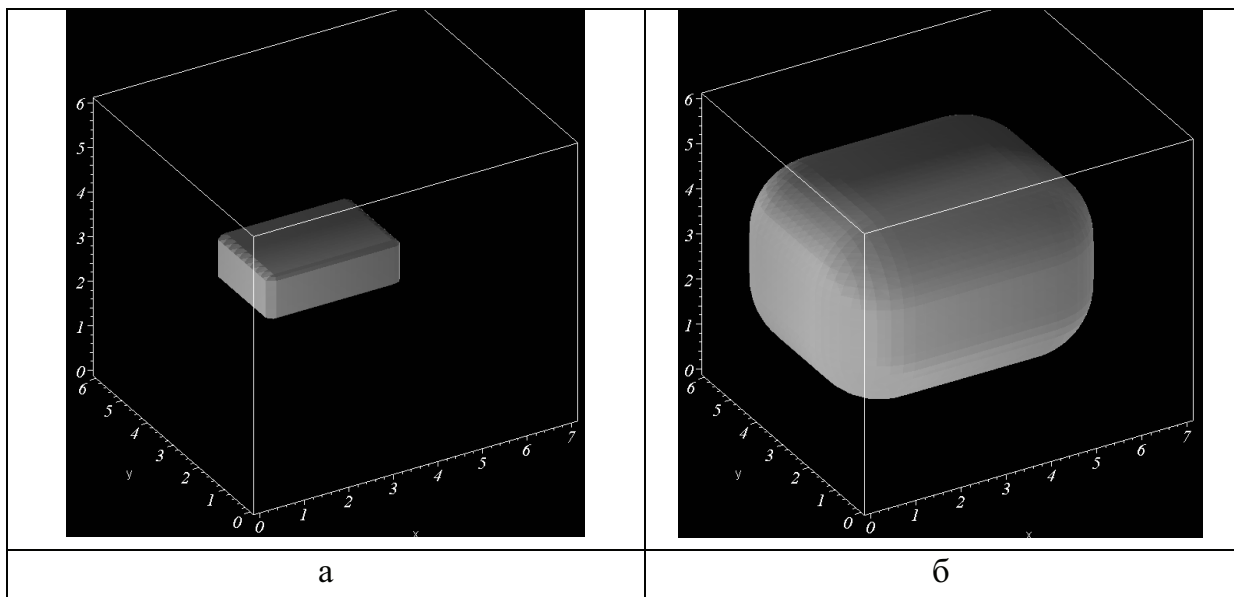


Рисунок 1 - Поверхня рівня нормальної функції паралелепіпеда при а) $\xi = 0.05$ і б) $\xi = 1.5$

Наведемо фрагмент Maple-програми для практичного опису нормальних функцій відрізка і паралелепіпеда, де функція (1) для наочного представлення „розкрита” за допомогою елементарних функцій.

```
paraped := (a, b, c, d, e, f) ->
sqrt((max(a, x) - min(b, x))^2 +
```

```

(max(c, y) - min(d, y))^2 +
(max(e, z) - min(f, z))^2 ):
otrezok := (xa, ya, za, xb, yb, zb) -> 1/2*
(((xb-xa)*(x-xa)+(yb-ya)*(y-ya)+(zb-za)*(z-za) -
abs(-(xb-xa)*(x-xa)-(yb-ya)*(y-ya)-(zb-za)*
(z-za)))^2+((xb-xa)*(x-xb)+(yb-ya)*(y-yb)+
(zb-za)*(z-zb)+abs(-(xb-xa)*(x-xb)-(yb-ya)*(y-yb)-
(zb-za)*(z-zb)))^2+
4*(x*ya-x*yb-xa*y+xa*yb+xb*y-xb*ya)^2+
4*(x*za-x*zb-xa*z+xa*zb+xb*z-xb*za)^2+
4*(y*za-y*zb-ya*z+ya*zb+yb*z-yb*za)^2)^(1/2)/
(xb^2-2*xb*xa+xa^2+yb^2-2*yb*ya+ya^2+zb^2-
2*zb*za+za^2)^(1/2):
F1 := otrezok(7, 1, 2, 5, 4, 5) - 1.:
F2 := paraped(1, 2, 2, 3, 1, 3) - 1.:
implicitplot3d({F1, F2}, x=0..7, y=0..6, z=0..6,
grid=[50,50,50], scaling=CONSTRAINED, axes=BOXED,
orientation=[-122,75], axesfont=[TIMES,ITALIC,18]);

```

На рис. 2 зображено результат виконання програми (отвори утворені внаслідок перетину поверхонь з координатними площинами).

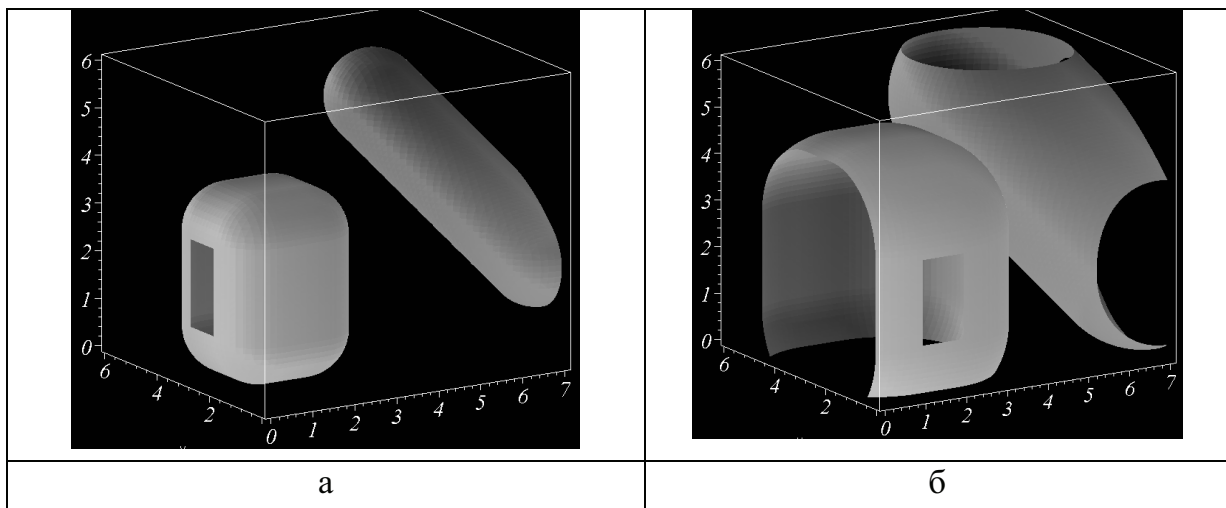


Рисунок 2 - Поверхні рівня нормальних функцій для відрізка і паралелепіпеда при а) $\xi = 1$ і б) $\xi = 2$

Засобами комп'ютерної графіки зручно спостерігати момент „дотику” поверхонь рівня в точці, яка розташована на відрізку мінімальної відстані. При цьому, згідно твердження 1, змінюючи величину

$\xi = \xi_T$, на екрані комп'ютера можна спостерігати перетин поверхонь рівня. Момент дотику ідентифікується завдяки „зникненню” об'єкта-перетину (рис. 3). Тобто в інтерактивному режимі можна наближено визначати відстань між відрізком і паралелепіпедом (для обраного випадку ця відстань наближено дорівнює 3,6 од.). Строгий мінімум R -диз'юнкції можна визначити, наприклад, методом Хука-Дживса [5].

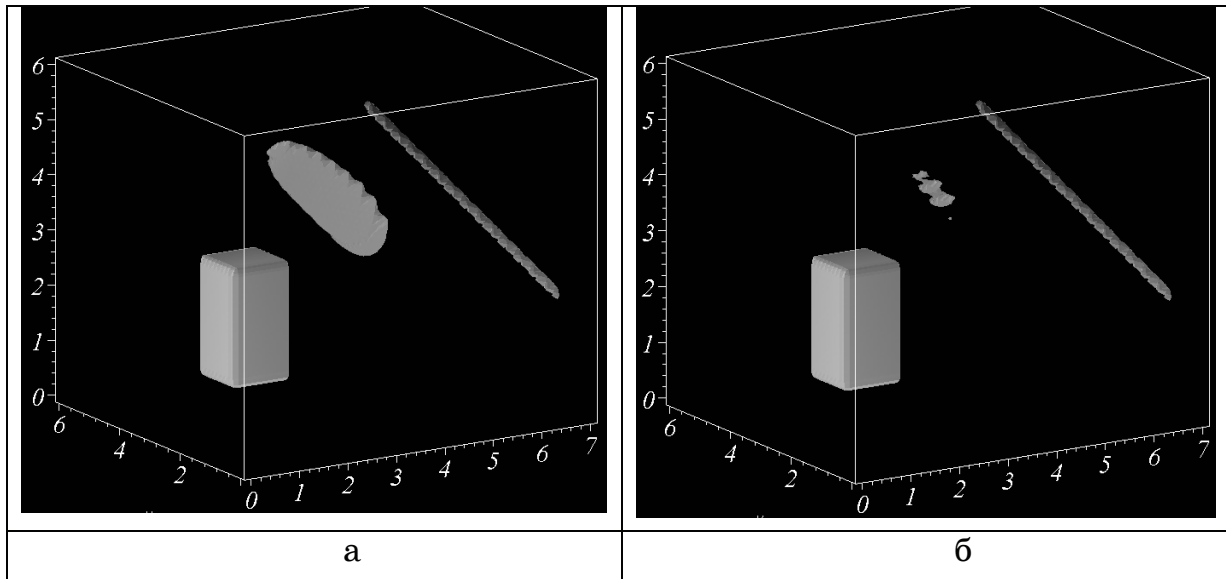


Рисунок 3 - Перетин поверхонь рівня при а) $\xi = 2,1$ і б) $\xi = 1,9$

Висновки. При складанні алгоритму розв'язання *позиційної* задачі A її доцільно звести до *метричної* задачі B , яку, із застосуванням нормальних функцій, можна розв'язати за допомогою обчислювальної техніки в інтерактивному режимі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беянин П.Н. Промышленные роботы. - М.: Машиностроение, 1975. - 400с.
2. Игнатьев М.Т., Кулаков Ф.М., Покровский А.М. Алгоритмы управления роботами - манипуляторами. -М.: Машиностроение, 1972. – 248 с.
3. Интегральные роботы. Сб. статей / Пер. с англ. под ред. Г.Е. Поздняка. - М.: Мир, 1973, вып.1. – 421 с.; 1975, вып.2. – 528 с.
4. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. - Киев: Техніка, 1967. - 212 с.
5. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс.- М.: Радио и связь, 1988. – 128с.

