

НОВЫЕ МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЕСОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОРРОДИРУЮЩИХ ИЗГИБАЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение. Изгибаемые стержневые элементы, эксплуатируемые в технологических и рабочих средах различных производств, часто подвергаются коррозионному износу. Коррозия наносит большой ущерб экономике в результате безвозвратных потерь металла, преждевременного, нередко аварийного, выхода из строя элементов оборудования. Потери можно сократить, в том числе, за счет внедрения новейших разработок в области проектирования и расчета конструкций, эксплуатируемых в агрессивных средах.

Рассматриваемые в работе балочные конструкции, широко применяются в аппаратах на нефтеперерабатывающих заводах в качестве опор для внутренних контактных устройств. Вследствие химических реакций и высокой температуры внутри колонны постоянно присутствуют пары воды, серной и сернистой кислот. При таких условиях имеет место электрохимическая коррозия, когда скорость процесса зависит от механических напряжений в элементах конструкции.

Таким образом актуальность проблемы оптимизации балочных конструкций не вызывает сомнений. В последние годы ей уделяется значительное внимание; некоторые подходы к ее решению изложены в обзорах [1, 2].

Анализ известных математических моделей. Для решения проблемы снижения материалоемкости балочных опор предлагается постановка задачи весовой оптимизации корродирующей балки по критерию минимума объема в начальный момент времени при заданном сроке эксплуатации.

В случаях, когда конструкция работает в нейтральной среде, то есть в функции ограничений время не входит, то имеет место одноконтурная модель с обратной связью, изображенная на рисунке 1.

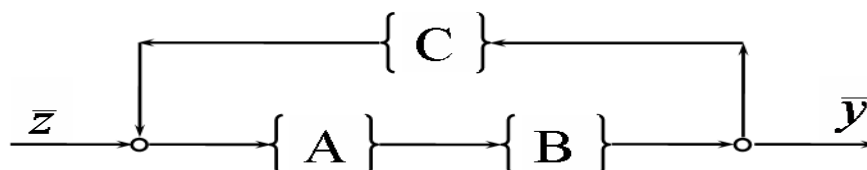


Рис. 1 – Одноконтурная модель

© Зеленцов Д.Г., Ускова Т.Ю., 2006

На рисунке приняты следующие обозначения: {A} – модуль вычисления целевой функции; {B} – модуль вычисления функции ограничений; {C} – модуль решения задачи нелинейного программирования; \bar{z} – вектор входных параметров, включающий в себя: \bar{x} – вектор варьируемых параметров; \bar{c} – вектор параметров конструкции; \bar{w} – вектор параметров численных процедур; \bar{y} – вектор выходных параметров (оптимальных параметров конструкции).

Эта же модель (далее – модель 1) может быть использована и при наличии слабоагрессивной среды, например, при атмосферной коррозии, математическая модель которой [3] имеет вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = k\delta(b - \delta) \quad (1)$$

Но условия эксплуатации элементов креплений в колоннах таковы, что делают невозможным использование этой модели. В нашем случае имеет место сильноагрессивная среда, скорость коррозии превышает 1 мм/год. При этом механические напряжения интенсифицируют коррозионный процесс. Математическая модель коррозионного износа может быть представлена в виде:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0\psi(\sigma(\delta)); \psi(0)=1; \delta|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

В качестве ограничений, обеспечивающих безотказную работу конструкции на протяжении всего срока эксплуатации, принимаются ограничения по прочности и жесткости. В виде задачи нелинейного математического программирования эта постановка может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} F = F(\bar{x}) \rightarrow \min \\ g_1 = [\sigma] - \frac{My^{max}}{I(\bar{x}, t^*)} \geq 0 \\ g_2 = [f] - \frac{ML^2}{EI(\bar{x}, t^*)} \geq 0 \\ g_3 = (x_i - x_i^-)(x_i^+ - x_i) \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Влияние напряжения приводит к появлению второго (внутреннего) контура, и модель решения оптимизационной задачи становится двухконтурной (в дальнейшем – модель 2). В общем виде она изображена на рисунке 2. Здесь обозначения те же, что и на рисунке 1.

Дополнительный модуль {D} – модуль пересчета геометрических параметров и вектор входных параметров \bar{z} включает в себя еще и вектор параметров агрессивной среды \bar{v} .

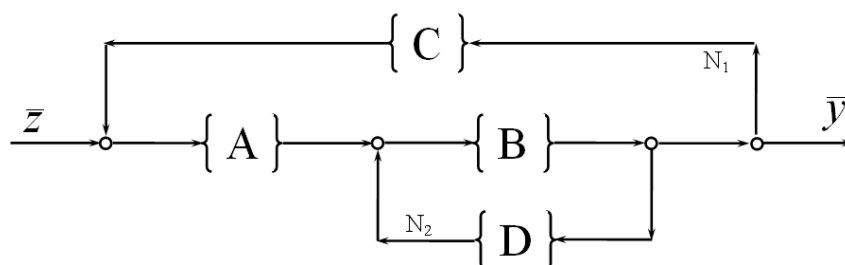


Рис. 2 – Двухконтурная модель

Данная модель неудобна по нескольким причинам. Прежде всего, она имеет низкую эффективность, особенно при оптимизации многоэлементных конструкций, когда вычисление функции ограничений предполагает численное решение задачи напряженно-деформированного состояния, и чувствительна к погрешностям, возникающим при вычислении функций ограничений.

В ряде случаев [4] возможен переход от нее к более удобной модели с последовательными одноконтурными связями, изображенной на рисунке 3 (модель 3). Реализация этой модели предполагает решение задачи оптимизации по критерию минимума массы в момент разрушения с последующим увеличением оптимальных параметров на величину, компенсирующую коррозионные потери.

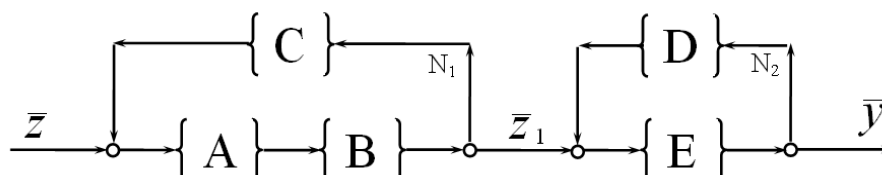


Рис. 3 – Модель с последовательными одноконтурными связями

Здесь \bar{z}_1 – вектор оптимальных параметров для нейтральной среды; {E} – модуль пересчета оптимальных параметров.

Преимущества модели 3 заключаются в том, что в ней задача Коши решается только один раз, что, несомненно, положительно сказывается на ее точности и эффективности. Однако, непосредственное использование этой модели для весовой оптимизации корродирующих балок невозможно. Это подтверждает анализ известных работ, посвященных данной проблеме. В одной из них [5] были предложены оптимальные решения задач для корродирующей двутавровой балки,

полученные с использованием моделей 2 и 3 (двухконтурной и с последовательными одноконтурными связями). Существенное расхождение результатов объясняется, очевидно, игнорированием периметра сечения в модели 3, который неявно входит в систему ограничений в модели 2.

Таким образом, переход от модели 2 к модели 3 если и возможен, то только после ее существенной адаптации.

Адаптация модели с последовательными одноконтурными связями.

В [6] была сформулирована задача оптимизации по обобщенному критерию: минимума площади сечения и минимума его периметра. В этом случае слагаемое, содержащее периметр, может рассматриваться как штрафная функция. Таким образом, влияние периметра сечения учитывается не в функциях ограничений, а в целевой функции. Приведя значения площади и периметра сечения к безразмерному виду, обобщенную целевую функцию можно представить в виде:

$$G = n \frac{P - P^-}{P^+ - P^-} + (1 - n) \frac{F - F^-}{F^+ - F^-}. \quad (4)$$

Здесь n – весовой коэффициент, учитывающий влияние периметра сечения ($n \in [0; 1]$); P^- , P^+ , F^- , F^+ – соответственно наименьшее и наибольшее из значений периметра и площади, которые они могут принимать в заданной области значений варьируемых параметров.

Из анализа результатов, полученных для прямоугольных сечений и приведенных в [6], следует, что оптимальные проекты, полученные с помощью моделей 2 и 3, совпадают при правильном выборе коэффициента влияния периметра сечения. Таким образом, для профилей, сечение которых представимо совокупностью прямоугольных фрагментов, была установлена качественная и количественная зависимость оптимальных параметров сечения от его периметра.

На основании статистической обработки результатов численного эксперимента предлагается эмпирическая формула для выбора этого коэффициента:

$$n = 1 - \frac{b}{v_0 t + b}, \quad (v_0 t \geq 0); \quad b = b([\sigma]), \quad (5)$$

где b – константа, зависящая от величины предельного напряжения.

Целью дальнейших исследований является доказательство возможности применения адаптированной модели к оптимизации размеров сечений произвольной формы.

Постановка задачи. Для доказательства возможности применимости адаптированной модели для различных профилей проведен численный эксперимент для балки произвольной формы сечения. Принимаются следующие требования к форме сечения: оно должно иметь две оси симметрии и кривая, ограничивающая его, является гладкой. Предложено сечение, состоящее из двух фрагментов (рисунок 4).

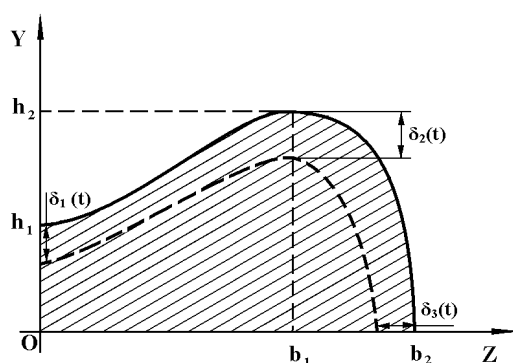


Рис. 4 – Сечение балки, состоящее из двух фрагментов

Постановка задачи предполагает возможность достижения в процессе решения задачи варьируемыми параметрами предельных значений и вырождения вследствие этого сечения в одно из приведенных на рисунке 5.

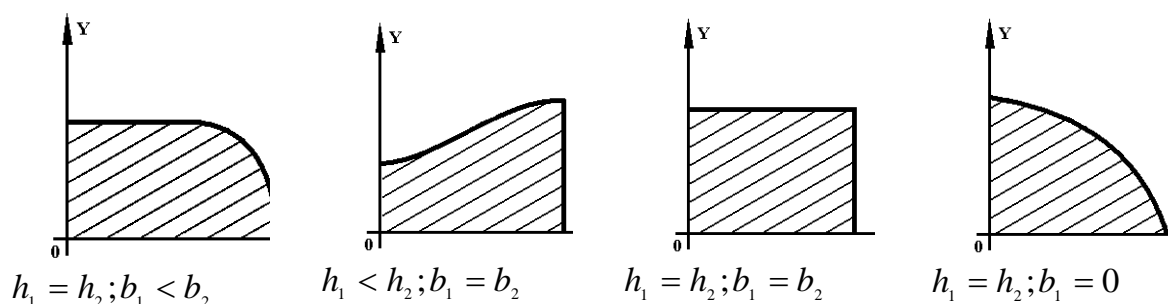


Рис. 5 – Частные случаи формы сечения

В качестве варьируемых параметров для модели 2 принимаются координаты характерных точек контура в начальный момент времени, которые изменяют свои значения в процессе эксплуатации.

$$\bar{x} = (b_1, b_2, h_1, h_2) \quad (6)$$

$$\begin{cases} h_1(t) = h_1 - \delta_1(t) \\ h_2(t) = h_2 - \delta_2(t) \\ b_2(t) = b_2 - \delta_3(t) \end{cases} \quad (7)$$

На основании анализа условий непрерывности и гладкости:

$$\begin{aligned} y|_{z=0} &= h_1 & y|_{z=b_1} &= h_2 & y|_{z=b_2} &= 0 \\ \frac{dy}{dx}|_{z=0} &= 0 & \frac{dy}{dx}|_{z=b_1} &= 0 & \frac{dy}{dx}|_{z=b_2} &= \infty \end{aligned} \quad (8)$$

выбираются функции, аппроксимирующие форму сечения:

$$z \in [0; b_1] \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \quad (9)$$

$$z \in [b_1; b_2] \quad f(z) = h_2 \sqrt{1 - \frac{(z - b_1)^2}{(b_2 - b_1)^2}} \quad (10)$$

Вычисление этих коэффициентов функции (9) производится на каждом шаге решения оптимизационной задачи путем численного решения системы:

$$\begin{cases} a_0(\bar{x}, t) = h_1(t) \\ a_1(\bar{x}, t) = 0 \\ a_2(\bar{x}, t) = \frac{3[h_1(t) - h_2(t)]}{b_1^2(t)} \\ a_3(\bar{x}, t) = -\frac{2[h_1(t) - h_2(t)]}{b_1^3(t)} \end{cases} \quad (11)$$

Постановка оптимизационной задачи для модели 2 примет вид:

$$\begin{cases} F(\bar{x})|_{t=0} = 4 \int_0^{b_1} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3) dz + \pi(b_2 - b_1)h_2 \rightarrow \min \\ g_1: [\sigma] - \frac{My^{\max}}{I(\bar{x}, t)} b_2(t) \geq 0 \\ g_2: (x_i^+ - x_i)(x_i - x_i^-) \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

Для модели 3 постановка задачи имеет вид (13):

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = n \frac{P(\bar{x}^*) - P^-}{P^+ - P^-} + (1-n) \frac{F(\bar{x}^*) - F^-}{F^+ - F^-} \rightarrow \min \\ g_1 = [\sigma] - \frac{My^{max}}{I(\bar{x}^*)} \geq 0 \\ g_2 : (x_i^+ - x_i)(x_i - x_i^-) \geq 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

Предполагается, что скорость коррозии направлена по нормали к поверхности, а модель коррозионного износа имеет вид [7]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0(1+k\sigma), \quad (14)$$

где k – коэффициент влияния напряжения на скорость коррозии.

Система дифференциальных уравнений, описывающая коррозионный процесс, решается на каждом шаге поиска оптимального проекта по алгоритму, описанному в [6].

Анализ результатов. Численный эксперимент проводился для балки нагруженной моментом $M = 25000$ кг×см и подверженной коррозионному износу, при значениях параметров: $v_0 = 0,1$ см/год; $k = 0,003$ МПа⁻¹. Область изменения варьируемых параметров: $0,1 \leq h_1^* \leq 2,0$ см; $0,1 \leq h_2^* \leq 4,0$ см; $0,1 \leq b_1^* \leq 6,0$ см; $0,1 \leq b_2^* \leq 7,0$ см. В функции ограничений принималось значение предельного напряжения: $[\sigma] \leq 240$ МПа. Заданная долговечность рассматривалась в пределах: $0,0 \leq t^* \leq 6,0$ лет.

Задача решалась с использованием модели 2 и адаптированной модели 3. Небольшое количество варьируемых параметров позволило применить метод перебора и получить значение глобального минимума целевых функций.

Некоторые результаты численного эксперимента представлены на рисунке 6. Здесь показана поверхность, представляющая собой площадь сечения балки, как функция двух переменных: параметра n и произведения $v_0 t$.

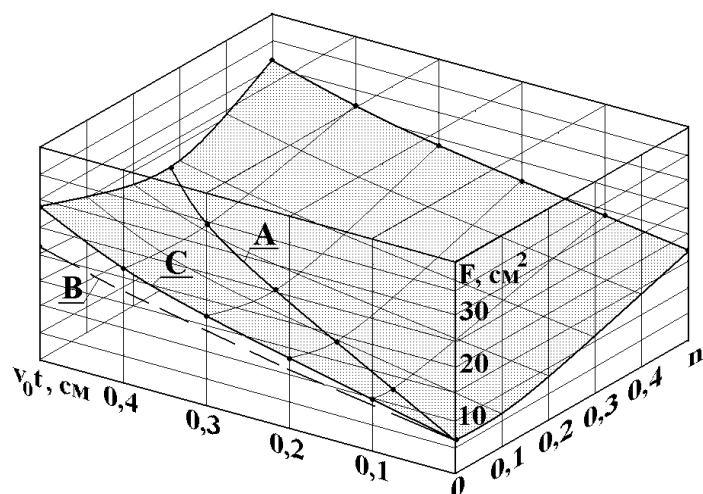


Рис. 6 – Зависимость площади поперечного сечения от параметров n и v_0t

Линия А проходит через точки минимума функции площади сечения балки $F = F(n)$, найденные для каждого значения параметра v_0t . С его увеличением точки минимума функции смещаются в сторону увеличения параметра n . Другими словами, влияние периметра сечения увеличивается при увеличении заданного срока эксплуатации конструкции или степени агрессивности среды. Кривая С соответствует решению задачи, полученному для модели 3 и показывает зависимость $F = F(v_0t)$ при игнорировании периметра. Кривая В представляет собой проекцию линии А на плоскость Fv_0t и соответствует решению задачи для адаптированной модели 3. Это решение практически совпадает с решением задачи для модели 2.

Результаты численного эксперимента представлены на рисунке 7.

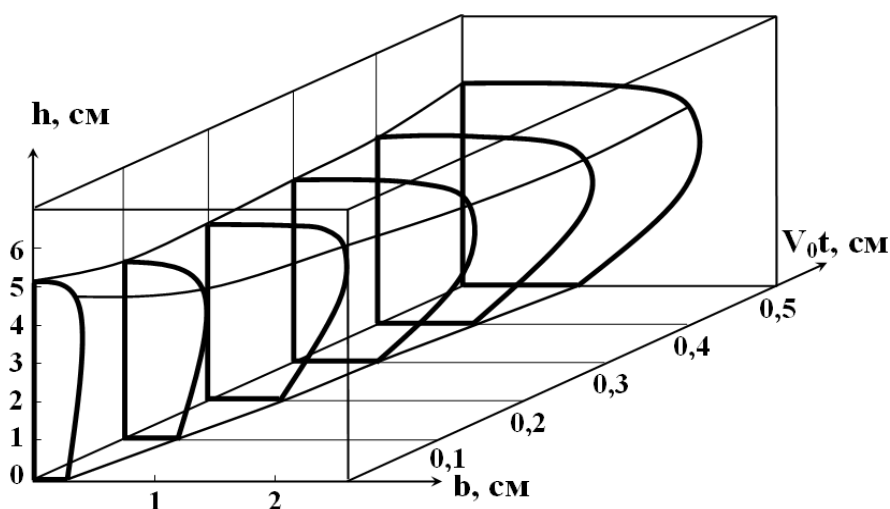


Рис. 7 – Оптимальные сечения балки для различных значений долговечности

В таблице 1 приведены численные результаты решения задачи с использованием модели 2. Значения оптимальных параметров, полученных с помощью адаптированной модели 3, приведены в скобках. Расхождения результатов не превышают 2 %.

Таблица 1 – Численные значения оптимальных размеров сечений

$\nu_0 t$, см	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
F , см ²	8,904 (8,923)	11,554 (11,608)	13,774 (13,780)	16,314 (16,286)	18,650 (18,631)	21,185 (21,207)
h_1 , см	4,230 (4,243)	3,758 (3,734)	3,640 (3,612)	3,876 (3,860)	3,758 (3,817)	3,640 (3,598)
h_2 , см	4,792 (4,914)	4,240 (4,297)	4,102 (4,115)	4,378 (4,403)	4,378 (4,341)	4,654 (4,592)
b_1 , см	0,366 (0,361)	0,480 (0,476)	0,556 (0,565)	0,670 (0,664)	0,784 (0,793)	0,860 (0,849)
b_2 , см	0,568 (0,559)	0,880 (0,869)	1,114 (1,107)	1,192 (1,207)	1,348 (1,351)	1,426 (1,448)

Выводы. На основании результатов численного эксперимента установлено, что получить оптимальные размеры сечений корродирующей балки непосредственно исходя из оптимального проекта для нейтральной среды (то есть при использовании модели 3) не удастся. Использование этой модели для получения оптимального решения возможно лишь после ее адаптации, заключающейся в изменении критерия оптимальности. Показана возможность использования адаптированной модели для произвольной формы сечения.

Определена степень влияния периметра сечения на его оптимальные параметры, а также качественные и количественные параметры данного влияния.

Таким образом, предложена новая модель оптимизации корродирующих балок при активных ограничениях по прочности. Она предполагает решение задачи оптимизации для нейтральной среды по обобщенному критерию для определенного коэффициента влияния периметра, и последующим увеличением оптимальных параметров на величину, компенсирующую коррозию.

Степень эффективности предложенной модели по сравнению с моделью 2 определяется формулой $\eta = \frac{N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2}$, где N_1 - количество

итераций при решении задачи нелинейного математического программирования; N_2 – количество итераций при численном решении задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников И.Г., Петров В.В. Прогнозирование работоспособности элементов конструкций, подвергающихся коррозионному износу (обзор). // Физико-химическая механика материалов. – 1991. – № 2. – С. 7 – 15.
2. Зеленцов Д.Г., Филатов Г.В. Обзор исследований по применению методов нелинейного математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. // Вопросы химии и химической технологии. – 2002. – № 4. – С. 108 – 115.
3. Овчинников И.Г., Петров В.В. Определение долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. // Строит. механика и расчет сооружений. – 1982. – № 2. – С. 8 – 10.
4. Zelentsov D.G., Pochtman Yu.M. The supporting power and the optimal design of the thin-walled constructions, which are subjected to influence of the aggressive mediums. // ICF-8. Fracture mechanics: Successes and problems. Collection of Abstracts – Lvov, 1993. – Part. 1. – P. 291 - 292.
5. Зеленцов Д.Г. Расчет конструкций с изменяющейся геометрией в агрессивных средах. Стержневые системы. – Днепропетровск: УГХТУ, 2002. – 168 с.
6. Зеленцов Д.Г., Ускова Т.Ю. Исследование влияния периметра на оптимальные параметры сечений корродирующих изгибаемых стержневых элементов. // Вопросы химии и химической технологии. – 2004. – № 6. – С. 119 – 122.
7. Долинский В.М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1967. - № 2. – С. 9 – 10.

Получено 14.02.2005 г.