УДК 624.072

М.А. Гаджиев

ИЗГИБ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА И УПРУГО ПЛАСТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ АРМАТУРЫ

Рассматривается чистый изгиб железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения с двойным армированием (см.рис.1). Нелинейная ползучесть бетона описывается нелинейно-наследственным уравнением В.М.Бондаренко [1]. При построении расчетной методики принимается, что для комплексного сечения справедлив закон плоских сечений и работа бетона на растяжении по сравнению с работой на сжатие не учитывается [1,2,3]. Упругопластическая работа арматурных стерженьков описывается диаграммой А.А.Ильюшина [4].

Для бетона при длительном загружении диаграмму деформирования принимаем в форме [1]

$$\varepsilon_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{E_{bt}} S_1\left(\frac{\sigma_{bt}}{R_{bt}}\right) - \int_{t_0}^{t} \sigma_{bt} S_2\left(\frac{\sigma_{b\tau}}{R_{b\tau}}\right) \frac{\partial C^*_{t,\tau}}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_y \tag{1}$$

Здесь S_1 и S_2 соответственно функции нелинейности мгновенного и длительного деформирования бетона при сжатии и по рекомендациям [1]их можно принимать в виде

$$S_i \equiv 1 + \eta_i \left(\frac{\sigma_{bt}}{R_{bt}}\right)^{m_i}, \; i = 1,2 \tag{2}$$

где η_i и m_i экспериментально устанавливаемые безразмерные параметры нелинейности.

ε_y – деформация усадка, которая может быть определена по зависимостям Г.Д. Вищневецкого [5]:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{np}\left(\exp(-b_1 t_0) - \exp(-b_1 t)\right), \tag{3}$$

где параметр b_1 в зависимости от температуры твердения бетона рекомендуется определять по зависимости $b_1 = 0,003\exp(-0,06T)$, где T – температура твердения бетона в ^{0}C.

Если принимать меру ползучести бетона по предложениям И.Е. Прокоповича и И.И. Улицкого [6] в виде

$$C_{t,\tau} = C_0\left[1 - \exp(-\gamma(t-\tau)\right] + A_0\left[\exp(-\gamma_2\tau) - \exp(-\gamma_2 t)\right] \tag{4}$$

то интегральное уравнение деформирования бетона (1) можно представить в следующей адекватной дифференциальной форме [7].

Для чего предварительно зависимость (1) приведем к безразмерной форме

$$\varepsilon_{bt} = \frac{R_{bt}}{E_{bt}}\theta_t S_1(\theta_k) - \int_{t_0}^{t} R_{b\tau}\theta_{b\tau}S_2(\theta_{b\tau})\frac{\partial C^*_{t,\tau}}{\partial\tau}d\tau \tag{5}$$

Тогда учитывая, что [8] $C^*_{t,\tau} = \frac{1}{E_\tau} - \frac{1}{E_t} + C_{t,\tau}$ окончательно получим следующую дифференциальную зависимость

$$\begin{aligned}&\ddot{\varepsilon}_{bt} + \gamma_1\dot{\varepsilon}_{bt} = \ddot{\varepsilon}_{yt} + \gamma_1\dot{\varepsilon}_{yt} + A_1(t)\left[S_1(\theta_{bt}) + \theta_{bt}S_1'(\theta_{bt})\right]\ddot{\theta}_{bt} + \\ &+A_1(t)\left[2S_1'(\theta_{bt}) + \theta_{bt}S_1''(\theta_{bt})\right]\dot{\theta}^2_{bt} + A_2(t)\left[S_1(\theta_{bt}) + \theta_{bt}S_1'(\theta_{bt})\right]\dot{\theta}_{bt} + \\ &+A_3(t)\left[S_2(\theta_{bt}) + \theta_{bt}S_2'(\theta_{bt})\right]\dot{\theta}_{bt} + A_4(t)\theta_{bt}S_1(\theta_{bt}) + A_5(t)\theta_{bt}S_2(\theta_{bt})\end{aligned} \tag{6}$$

Соответствующие начальные условия при $t=t_0$ имеют вид

$$\varepsilon_{bt_0} = A_1(t_0)\theta_{bt_0}S_1(\theta_{bt_0}) + \varepsilon_{yt_0},$$

$$\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_{bt_0} = A_1(t_0)\left[S_1(\theta_{bt_0}) + \theta_{bt_0}S_1'(\theta_{bt_0})\right]\dot{\theta}_{bt_0} + \\ &+A_6(t_0)\theta_{bt_0}S_1(\theta_{bt_0}) + A_7(t_0)\theta_{bt_0}S_2(\theta_{bt_0}) + \dot{\varepsilon}_{yt_0}\end{aligned} \tag{7}$$

Входящие в вышеприведенные зависимости функции времени имеют вид

$$A_1(t) = \frac{R_{bt}}{E_{bt}},\ A_2(t) = \frac{\gamma_1 R_{bt}}{E_{bt}} + \frac{2R_{bt}'}{E_{bt}} - \frac{2R_{bt}E_{bt}'}{E^2_{bt}},$$

$$A_3(t) = \frac{R_{bt}E_{bt}'}{E^2_{bt}} + R_{bt}C_0\gamma_1 + A_0R_{bt}\gamma_2\exp(-\gamma_2 t),$$

$$A_4(t) = \frac{\gamma_1 R_{bt}'}{E_{bt}} - \frac{\gamma_1 R_{bt}'E_{bt}'}{E^2_{bt}} + \frac{R_{bt}''}{E_{bt}} - \frac{2R_{bt}'E_{bt}'}{E^2_{bt}} - \frac{R_{bt}E_{bt}''}{E^2_{bt}} + \frac{2R_{bt}E'^2_{bt}}{E^3_{bt}},$$

$$A_5(t) = \frac{\gamma_1 R_{bt}E_{bt}'}{E^2_{bt}} + R_{bt}C_0\gamma_1^2 + R_{bt}A_0\gamma_1\gamma_2\exp(-\gamma_2 t) + \frac{R_{bt}'E_{bt}'}{E^2_{bt}}$$

$$+\frac{R_{bt}E_{bt}''}{E^2_{bt}} - \frac{2R_{bt}E'^2_{bt}}{E^3_{bt}} + R_{bt}'C_0\gamma_1 + A_0R_{bt}'\gamma_2\exp(-\gamma_2 t) - A_0\gamma_2^2R_{bt}\exp(-\gamma_2 t),$$

$$A_6(t) = \frac{R_{bt}'}{E_{bt}} - \frac{R_{bt}E_{bt}'}{E^2_{bt}},\ A_7(t) = \frac{R_{bt}E_{bt}'}{E^2_{bt}} + R_{bt}C_0\gamma_1 + R_{bt}A_0\gamma_2\exp(-\gamma_2 t)$$

$$A_7(t) = \frac{R_{bt}E_{bt}'}{E^2_{bt}} + R_{bt}C_0\gamma_1 + R_{bt}A_0\gamma_2\exp(-\gamma_2 t). \tag{8}$$

 ISSN 1562-9945

Диаграмму деформирования арматурных стержней примем в форме [4]

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \left[1 - \omega_s(\varepsilon_s)\right] \tag{9}$$

где ω_s функция нелинейности.

Покажем распределение нормальных напряжений по высоте сечения. Согласно исследованиям [1,2] распределение нормальных напряжений по высоте сечения может быть аппроксимирована в виде

$$\sigma_{bz} = \sigma_{bt} \left(\frac{z + x - 0.5}{x} \right)^n \tag{10}$$

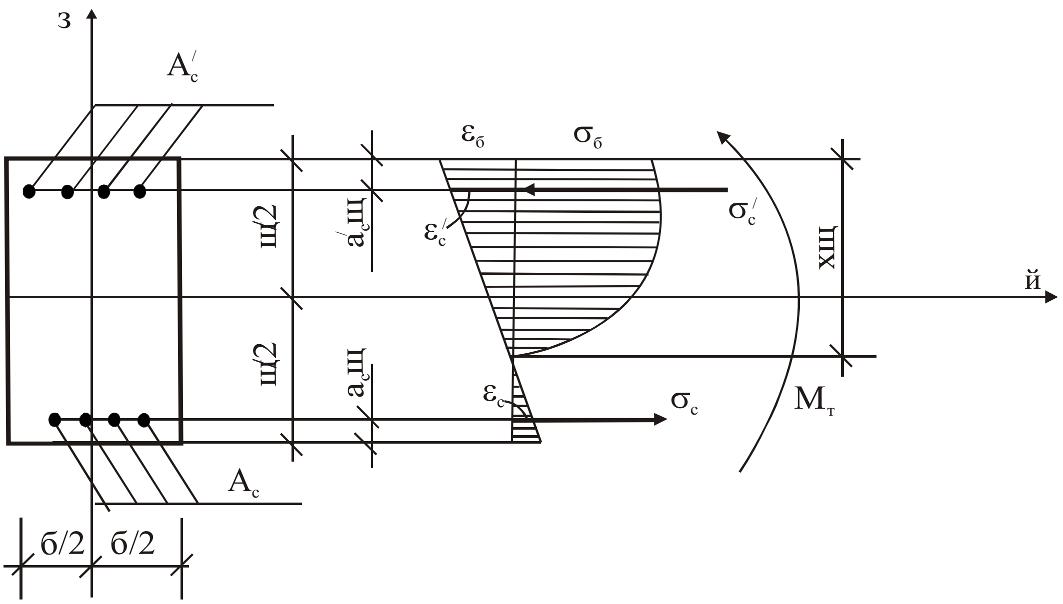

Рис. 1

Тогда на основании формул сопротивления материалов для главного вектора и главного момента эпюры нормальных сжимающих напряжений в бетоне найдем

$$N_b = bh\sigma_{bt} \frac{x}{n+1}; \quad M_b = bh^2\sigma_{bt} \left[\frac{x^2}{n+2} - \frac{x^2 - 0,5x}{n+1} \right] \tag{11}$$

Закон плоских сечений позволяет выразить деформации арматурных стержней через деформацию крайнего сжатого волокна бетона ε_b и высоты сжатой зоны x:

$$\varepsilon_s' = \frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - a_s'); \quad \varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - 1 + a_s) \tag{12}$$

Тогда для главного вектора и главного момента напряжений в арматурных стержнях найдем

ISSN 1562-9945

$$N_s = E_s' A_s' \frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - a_s')\left[1 - \omega_s'(\varepsilon_{bt}, x)\right] + E_s A_s \frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - 1 + a_s)\left[1 - \omega_s(\varepsilon_{bt}, x)\right]$$

$$\begin{aligned} M_s &= E_s' A_s' h(0,5 - a_s')\frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - a_s')\left[1 - \omega_s'(\varepsilon_{bt}, x)\right] - \\ &-E_s A_s h(0,5 - a_s)\frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - 1 + a_s)\left[1 - \omega_s(\varepsilon_{bt}, x)\right] \end{aligned} \qquad (13)$$

На основании вышеприведенных зависимостей составим уравнения равновесия для рассматриваемого сечения

$$\begin{aligned} &\theta_{bt}\frac{x}{n+1} + \mu_{st}'\frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - a_s')(1 - \omega_s') + \mu_{st}\frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - 1 + a_s)(1 - \omega_s) = 0 \\ &\theta_{bt}\left(\frac{x^2}{n+2} - \frac{x^2 - 0,5x}{n+1}\right) + \mu_{st}'(0,5 - a_s')\frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - a_s')(1 - \omega_s') - \\ &-\mu_{st}(0,5 - a_s)\frac{\varepsilon_{bt}}{x}(x - 1 + a_s)(1 - \omega_s) = \bar{M}_t \end{aligned} \qquad (14)$$

Здесь

$$\mu_{st}' = \frac{E_s' A_s'}{R_{bt} bh}; \mu_{st} = \frac{E_s A_s}{R_{bt} bh}; \bar{M}_t = \frac{M_t}{R_{bt} bh^2}$$

Так как основной закон деформирования бетона дифференциальное уравнение второго порядка продифференцируем уравнения равновесия также два раза по времени

$$\begin{aligned} &\dot{\theta}_{bt}\frac{x}{n+1} - \frac{\theta_{bt} x}{(n+1)^2}\cdot\dot{n} + \frac{R_{bt}'}{R_{bt}}\theta_{bt}\frac{x}{n+1} + \left[\frac{\theta_{bt}}{n+1} + \mu_{st}'\varepsilon_{bt}\frac{a_s'}{x^2}(1 - \omega_s') - \right. \\ &\left. -\mu_{st}'\varepsilon_{bt}(1 - \frac{a_s'}{x})\omega_{sx}' + \mu_{st}\varepsilon_{bt}\frac{1 - a_s}{x^2}(1 - \omega_s) - \mu_{st}\varepsilon_{bt}\left(1 - \frac{1 - a_s}{x}\right)\omega_{sx}\right]\cdot\dot{x} + \\ &+\left[\mu_{st}'\left(1 - \frac{a_s}{x}\right)(1 - \omega_s' - \varepsilon_{bt}\omega_{s\varepsilon}') + \mu_{st}\left(1 - \frac{1 - a_s}{x}\right)(1 - \omega_s - \varepsilon_{bt}\omega_{s\varepsilon})\right]\cdot\dot{\varepsilon}_{bt} = 0, \\ &\dot{\theta}_{bt}\left(\frac{x^2}{n+2} - \frac{x^2 - 0,5x}{n+1}\right) + \frac{R_{bt}'}{R_{bt}}\theta_{bt}\left(\frac{x^2}{n+2} - \frac{x^2 - 0,5x}{n+1}\right) + \\ &+\left[\theta_{bt}\left(\frac{2x}{n+2} - \frac{2x - 0,5}{n+1}\right) + \mu_{st}'(0,5 - a_s')\varepsilon_{bt}\frac{a_s'}{x}(1 - \omega_s') - \right. \\ &-\mu_{st}'(0,5 - a_s')\varepsilon_{bt}\left(1 - \frac{a_s'}{x}\right)\omega_{sx}' - \mu_{st}(0,5 - a_s)\varepsilon_{bt}\frac{1 - a_s}{x^2}(1 - \omega_s) + \\ &\left. +\mu_{st}(0,5 - a_s)\varepsilon_{bt}\left(1 - \frac{1 - a_s}{x}\right)\omega_{sx}\right]\dot{x} + \left[\mu_{st}'(0,5 - a_s')\left(1 - \frac{a_s'}{x}\right)\times\right. \end{aligned}$$

$$\times(1-\omega_s'-\varepsilon_{bt}\omega_{s\varepsilon}')-\mu_{st}(0,5-a_s)\left(1-\frac{1-a_s}{x}\right)\times$$

$$\times(1-\omega_s-\varepsilon_{bt}\omega_{s\varepsilon})]\dot{\varepsilon}_{bt}+\theta_{bt}\left(\frac{x^2-0,5x}{(n+1)^2}-\frac{x^2}{(n+2)^2}\right)\dot{n}=\dot{\bar{M}}_t+\frac{R_{bt}'}{R_{bt}}\bar{M}_t \qquad (15)$$

Чтобы не загромождать запись более сокращению вышеприведенные зависимости представим в виде

$$\dot{\theta}_{bt}\frac{x}{n+1}-\frac{\theta_{bt}x}{(n+1)^2}\cdot\dot{n}+\mu_1\dot{x}+\mu_2\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_3=0$$

$$\dot{\theta}_{bt}\left(\frac{x^2}{n+2}-\frac{x^2-0,5x}{n+1}\right)+\theta_{bt}\left(\frac{x^2-0,5x}{(n+1)^2}-\frac{x^2}{(n+2)^2}\right)\dot{n}+ \qquad (16)$$

$$+\mu_4\dot{x}+\mu_5\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_6=\frac{R_{bt}'}{R_{bt}}\bar{M}_t+\dot{\bar{M}}_t$$

Вновь введенные функций μ_i ясны из вышеприведенных зависимостей.

Продифференцировать еще раз зависимости (16) имеем

$$\ddot{\theta}_{bt}\frac{x}{n+1}-\frac{\theta_{bt}x}{(n+1)^2}\cdot\ddot{n}+\mu_1\ddot{x}+\mu_2\ddot{\varepsilon}_{bt}+\dot{\theta}_{bt}\frac{\dot{x}}{n+1}-2\dot{\theta}_{bt}\frac{x}{(n+1)^2}\dot{n}-\frac{\theta_{bt}\dot{x}}{(n+1)^2}\dot{n}+$$

$$+2\frac{\theta_{bt}x}{(n+1)^3}\dot{n}^2+(\mu_{1x}\dot{x}+\mu_{2x}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{3x})\dot{x}+(\mu_{1\theta}\dot{x}+\mu_{2\theta}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{3\theta})\dot{\theta}_{bt}+$$

$$+(\mu_{1\varepsilon}\dot{x}+\mu_{2\varepsilon}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{3\varepsilon})\dot{\varepsilon}_{bt}+(\mu_{1n}\dot{x}+\mu_{2n}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{3n})\dot{n}+\mu_{1t}\dot{x}+\mu_{2t}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{3t}=0,$$

$$\ddot{\theta}_{bt}\left(\frac{x^2}{n+2}-\frac{x^2-0,5x}{n+1}\right)+\theta_{bt}\left(\frac{x^2-0,5x}{(n+1)^2}-\frac{x^2}{(n+2)^2}\right)\ddot{n}+$$

$$+\mu_4\ddot{x}+\mu_5\ddot{\varepsilon}_{bt}+\dot{\theta}_{bt}\left(\frac{2x}{n+2}-\frac{2x-0,5}{n+1}\right)\dot{x}+2\dot{\theta}_{bt}\dot{n}\left(\frac{x^2-0,5x}{(n+1)^2}-\frac{x^2}{(n+2)^2}\right)+$$

$$+\theta_{bt}\left(\frac{2x-0,5}{(n+1)^2}-\frac{2x}{(n+2)^2}\right)\dot{x}\dot{n}+2\theta_{bt}\dot{n}^2\left(\frac{x^2}{(n+2)^3}-\frac{x^2-0,5x}{(n+1)^3}\right)+ \qquad (17)$$

$$+(\mu_{4x}\bar{x}+\mu_{5x}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{6x})\dot{x}+(\mu_{4\theta}\dot{x}+\mu_{5\theta}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{6\theta})\dot{\theta}_{bt}+$$

$$+(\mu_{4\varepsilon}\dot{x}+\mu_{5\varepsilon}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{6\varepsilon})\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{4t}\dot{x}+\mu_{5t}\dot{\varepsilon}_{bt}+\mu_{6t}=\ddot{\bar{M}}_t+\frac{R_{bt}'}{R_{bt}}\dot{\bar{M}}_t+$$

$$+\left(\frac{R_{bt}''}{R_{bt}}-\frac{2R_{bt}'^2}{R_{bt}^2}\right)\bar{M}_t,$$

В вышеприведенных зависимостях индексы у вновь введенных функциях означают дифференцирование по этим индексам.

Согласно исследованиям [1] параметр нелинейности n также выражается через напряжение крайнего сжатого волокна бетона

$$n = 1 - f_{*}\theta_{bt}^{m_{*}} \tag{18}$$

Продифференцируем эту зависимость также в два раза по времени

$$\dot{n} = -f_{*}m_{*}\theta_{bt}^{m_{*}-1}\dot{\theta}_{bt},$$

$$\ddot{n} = -f_{*}m_{*}(m_{*}-1)\theta_{bt}^{m_{*}-2}\dot{\theta}_{bt}^{2} - f_{*}m_{*}\theta_{bt}^{m_{*}-1}\ddot{\theta}_{bt} \tag{19}$$

Полученные зависимости (5), (17) и (19) представляют собой полную систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами для исследования напряженно-деформированного состояния изгибаемого железобетонного элемента.

Более сокращенно полученную систему можно представить в виде

$$\begin{cases} D_{11}\ddot{\theta}_{bt} - \ddot{\varepsilon}_{bt} = F_1 \\ D_{21}\ddot{\theta}_{bt} + \mu_2\ddot{\varepsilon}_{bt} - D_{22}\ddot{n} + \mu_1\ddot{x} = F_2 \\ D_{31}\ddot{\theta}_{bt} + \mu_5\ddot{\varepsilon}_{bt} + D_{32}\ddot{n} + \mu_4\ddot{x} = F_3 \\ D_{41}\ddot{\theta}_{bt} + \ddot{n} = F_4 \end{cases} \tag{20}$$

Дальнейшие выкладки представим в матричной форме, для чего введем следующий вектор неизвестных $\{Y\}$, элементами которых являются параметры напряженно-деформированного состояния армированного сечения.

$$\{Y\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_8\}^T = \{\theta_{bt}, n, \varepsilon_{bt}, x, \dot{\theta}_{bt}, \dot{n}, \dot{\varepsilon}_{bt}, \dot{x}\}^T \tag{21}$$

Тогда полученную систему (20) можно представить в следующем виде

$$\{\dot{Y}\} = \{B(\{Y\})\}. \tag{22}$$

Здесь

$$B_i = y_{i+4}; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$B_5 = \frac{\mu_4(\mu_2F_1 + F_2 + D_{22}F_4) - \mu_1(F_3 + \mu_5F_1 - D_{32}F_4)}{\mu_4(D_{21} + \mu_2D_{11} + D_{22}D_{41}) - \mu_1(D_{31} + \mu_5D_{11} - D_{32}D_{41})},$$

$$B_6 = F_4 - D_{41}B_5; B_7 = D_{11}B_6 - F_1,$$

$$B_8 = \frac{(D_{21} + \mu_2 D_{11} + D_{22} D_{41})(F_3 + \mu_5 F_1 - D_{32} F_4)}{\mu_4 (D_{21} + \mu_2 D_{11} + D_{22} D_{41}) - \mu_1 (D_{31} + \mu_5 D_{11} - D_{32} D_{41})} -$$

$$- \frac{(D_{31} + \mu_5 D_{11} - D_{32} D_{41})(\mu_2 F_1 + D_{22} F_4 + F_2)}{\mu_4 (D_{21} + \mu_2 D_{11} + D_{22} D_{41}) - \mu_1 (D_{31} + \mu_5 D_{11} - D_{32} D_{41})}$$

$$\mu_1 = \frac{y_1}{y_2 + 1} + \mu'_{st} y_3 \frac{a'_s}{y_4^2}(1 - \omega'_s) - \mu'_{st} y_3 (1 - \frac{a'_s}{y_4})\omega'_{sx} +$$

$$+\mu_{st} y_3 \frac{1 - a_s}{y_4^2}(1 - \omega_s) - \mu_{st} y_3 (1 - \frac{a_s}{y_4})\omega_{sx}$$

$$\mu_2 = \mu'_{st}(1 - \frac{a'_s}{y_4})(1 - \omega'_s - y_3 \omega'_{s\varepsilon}) + \mu_{st}(1 - \frac{a_s}{y_4})(1 - \omega_s - y_3 \omega_{s\varepsilon})$$

$$\mu_3 = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}} \cdot \frac{y_1 y_4}{y_2 + 1}$$

$$\mu_4 = y_1 \left(\frac{2y_4}{y_2 + 2} - \frac{2y_4 - 0,5}{y_2 + 1} \right) + \mu'_{st}(0,5 - a'_s) y_3 \frac{a'_s}{y_4^2}(1 - \omega'_s) -$$

$$-\mu'_{st}(0,5 - a'_s) y_3 (1 - \frac{a'_s}{y_4})\omega'_{sx} - \mu_{st}(0,5 - a_s) y_3 \frac{1 - a_s}{y_4^2}(1 - \omega_s) +$$

$$+\mu_{st}(0,5 - a_s) y_3 (1 - \frac{1 - a_s}{y_4})\omega_{sx}$$

$$\mu_5 = \mu'_{st}(0,5 - a'_s)(1 - \frac{a_s}{y_4})(1 - \omega'_s - y_3 \omega'_{s\varepsilon}) -$$

$$-\mu_{st}(0,5 - a_s)(1 - \frac{1 - a_s}{y_4})(1 - \omega_s - y_3 \omega_{s\varepsilon}),$$

$$\mu_6 = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}} y_1 \left(\frac{y_4^2}{y_2 + 2} - \frac{y_4^2 - 0,5 y_4}{y_2 + 1} \right),$$

$$\mu_{1\theta} = \frac{1}{y_2 + 1},$$

$$\mu_{1x} = -2\mu'_{st} y_3 \frac{a'_s}{y_4^3}(1 - \omega'_s) - 2\mu'_{st} y_3 \frac{a'_s}{y_4^2}\omega'_{sx} - \mu'_{st} y_3 (1 - \frac{a'_s}{y_4})\omega'_{sxx} -$$

$$-2\mu_{st} y_3 \frac{1 - a_s}{y_4^3}(1 - \omega_s) - 2\mu_{st} \frac{1 - a_s}{y_4^2}\omega_{sx} + \mu_{st} y_3 (1 - \frac{1 - a_s}{y_4})\omega_{sxx},$$

$$\mu_{1n} = -\frac{y_1}{(y_2 + 1)^2},$$

$$\mu_{1\varepsilon} = \mu'_{st}\frac{a'_s}{y_4^2}(1-\omega'_s) - \mu'_{st}y_3\frac{a'_s}{y_4^2}\omega'_{s\varepsilon} - \mu'_{st}(1-\frac{a'_s}{y_4})\omega'_{sx} - \mu'_{st}y_3\left(1-\frac{a'_s}{y_4}\right)\omega'_{sx\varepsilon} +$$

$$+\mu_{st}\frac{1-a_s}{y_4^2}(1-\omega_s) - \mu_{st}y_3\left(1-\frac{1-a_s}{y_4}\right)\omega_{sx} -$$

$$-\mu_{st}y_3(1-\frac{1-a_s}{y_4})\omega_{sx\varepsilon} - \mu_{st}y_3\frac{1-a_s}{y_4^2}\omega_{s\varepsilon},$$

$$\mu_{2x} = \mu'_{st}\frac{a'_s}{y_4^2}(1-\omega'_s - y_3\omega'_{s\varepsilon}) - \mu'_{st}(1-\frac{a'_s}{y_4})(\omega'_{sx} + y_3\omega'_{sx\varepsilon}) +$$

$$+\mu_{st}\frac{1-a_s}{y_4^2}(1-\omega_s - y_3\omega_{s\varepsilon}) - \mu_{st}(1-\frac{1-a_s}{y_4})(\omega_{sx} + y_3\omega_{sx\varepsilon}),$$

$$\mu_{2\varepsilon} = -\mu'_{st}(1-\frac{a'_s}{y_4})(2\omega'_{s\varepsilon} + y_3\omega'_{s\varepsilon\varepsilon}) - \mu_{st}(1-\frac{1-a_s}{y_4})(2\omega_{s\varepsilon} + y_3\omega_{s\varepsilon\varepsilon}),$$

$$\mu_{2\theta} = \mu_{2n} = 0,$$

$$\mu_{1t} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\left(\frac{y_1}{y_2+1} - \mu_1\right); \ \mu_{2t} = -\frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\mu_2 \ \ \mu_{3t} = \left(\frac{R''_{bt}}{R_{bt}} - \frac{R'^2_{bt}}{R^2_{bt}}\right)\frac{y_1 y_4}{y_2+1},$$

$$\mu_{4t} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}y_1\left(\frac{2y_4}{y_2+2} - \frac{2y_4 - 0,5}{y_2+1}\right) - \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\mu_4,$$

$$\mu_{5t} = -\frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\mu_5; \ \mu_{6t} = \left(\frac{R''_{bt}}{R_{bt}} - \frac{R'^2_{bt}}{R^2_{bt}}\right)y_1\left(\frac{y_4^2}{y_2+2} - \frac{y_4^2 - 0,5y_4}{y_2+1}\right),$$

$$\mu_{3x} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\frac{y_1}{y_2+1}, \ \mu_{3\varepsilon} = 0; \ \mu_{3n} = -\frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\frac{y_1 y_4}{(y_2+1)^2}, \ \mu_{3\theta} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\frac{y_4}{y_2+1},$$

$$\mu_{4\theta} = \frac{2y_4}{y_2+2} - \frac{2y_4 - 0,5}{y_2+1},$$

$$\mu_{4x} = y_1\left(\frac{2}{y_2+2} - \frac{2}{y_2+1}\right) - 2\mu'_{st}(0,5-a'_s)y_3\frac{a'_s}{y_4^3}(1-\omega'_s) -$$

$$-2\mu'_{st}(0,5-a'_s)y_3\frac{a'_s}{y_4^2}\omega'_{sx} - \mu'_{st}(0,5-a'_s)y_3(1-\frac{a'_s}{y_4})\omega'_{sxx} +$$

$$+2\mu_{st}(0,5-a_s)y_3\frac{1-a_s}{y_4^3}(1-\omega_s) +$$

$$+2\mu_{st}(0,5-a_s)y_3\frac{1-a_s}{y_4^2}\omega_{sx} + \mu_{st}(0,5-a_s)y_3(1-\frac{1-a_s}{y_4})\omega_{sxx},$$

 ISSN 1562-9945

$$\mu_{4\varepsilon} = \mu'_{st}(0,5-a'_s)\frac{a'_s}{y_4^2}(1-\omega'_s) - \mu'_{st}(0,5-a'_s)y_3\frac{a'_s}{y_4^2}\omega_{s\varepsilon} -$$

$$-\mu'_{st}(0,5-a'_s)(1-\frac{a'_s}{y_4})\omega'_{sx} - \mu'_{st}(0,5-a_s)y_3(1-\frac{a'_s}{y_4})\omega'_{s\varepsilon x} -$$

$$-\mu_{st}(0,5-a_s)\frac{1-a_s}{y_4^2}(1-\omega_s) + \mu_{st}(0,5-a_s)y_3\frac{1-a_s}{y_4^2}\omega_{s\varepsilon} +$$

$$+\mu_{st}(0,5-a_s)(1-\frac{1-a_s}{y_4})\omega_{sx} + \mu_{st}(0,5-a_s)y_3(1-\frac{1-a_s}{y_4})\omega_{sx\varepsilon},$$

$$\mu_{4n} = y_1\left(\frac{2y_4-0,5}{(y_2+1)^2} - \frac{2y_4}{(y_2+2)^2}\right), \ \mu_{5\theta} = \mu_{5n} = 0$$

$$\mu_{5x} = \mu'_{st}(0,5-a'_s)\frac{a'_s}{y_4^2}(1-\omega'_s - y_3\omega'_{s\varepsilon}) - \mu'_{st}(0,5-a'_s)(1-\frac{a'_s}{y_4})(\omega'_{sx} + y_3\omega'_{sx\varepsilon}) -$$

$$-\mu_{st}(0,5-a_s)\frac{1-a_s}{y_4^2}(1-\omega_s - y_3\omega_{s\varepsilon}) + \mu_{st}(0,5-a_s)(1-\frac{1-a_s}{y_4})(\omega_{sx} + y_3\omega_{sx\varepsilon}),$$

$$\mu_{6\theta} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\left(\frac{y_4^2}{y_2+2} - \frac{y_4^2-0,5y_4}{y_2+1}\right),$$

$$\mu_{6n} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}y_1\left(\frac{y_4^2-0,5y_4}{(y_2+1)^2} - \frac{y_4^2}{(y_2+2)^2}\right),$$

$$\mu_{6x} = \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}y_1\left(\frac{2y_4}{y_2+2} - \frac{2y_4-0,5}{y_2+1}\right); \quad \mu_{6\varepsilon} = 0$$

$$D_{21} = \frac{y_4}{y_2+1}, \quad D_{22} = \frac{y_1y_4}{(y_2+1)^2},$$

$$F_2 = 2y_5y_6\frac{y_4}{(y_2+1)^2} - \frac{y_5y_8}{y_2+1} + \frac{y_1y_8y_6}{(y_2+1)^2} - \frac{2y_1y_4y_6^2}{(y_2+1)^3} -$$

$$-(\mu_{1x}y_8 + \mu_{2x}y_7 + \mu_{3x})y_8 - (\mu_{1\theta}y_8 + \mu_{2\theta}y_7 + \mu_{3\theta})y_5 -$$

$$-(\mu_{1\varepsilon}y_8 + \mu_{2\varepsilon}y_7 + \mu_{3\varepsilon})y_7 - (\mu_{1n}y_8 + \mu_{2n}y_7 + \mu_{3n})y_6 -$$

$$-\mu_{1t}y_8 - \mu_{2t}y_7 - \mu_{3t},$$

$$D_{31} = \frac{y_4^2}{y_2+2} - \frac{y_4^2-0,5y_4}{y_2+1}, \ D_{32} = \left(\frac{y_4^2-0,5y_4}{(y_2+1)^2} - \frac{y_4^2}{(y_2+2)^2}\right)y_1,$$

$$F_3 = \ddot{\bar{M}}_t + \frac{R'_{bt}}{R_{bt}}\dot{\bar{M}}_t + \frac{R''_{bt}}{R_{bt}}\bar{M}_t - 2\frac{R'^2_{bt}}{R_{bt}}\bar{M}_t - y_5 y_8\left(\frac{2y_4}{y_2+2} - \frac{2y_4-0,5}{y_2+1}\right) -$$

$$-2y_5y_6\left(\frac{y_4^2-0,5y_4}{(y_2+1)^2} - \frac{y_4^2}{(y_2+2)^2}\right) - y_1y_6y_8\left(\frac{2y_4-0,5}{(y_2+1)^2} - \frac{2y_4}{(y_2+1)^2}\right) -$$

$$-2y_1y_6^2\left(\frac{2y_4^2}{(y_2+2)^3} - \frac{y_4^2-0,5y_4}{(y_2+1)^3}\right) - -(\mu_{4x}y_8 + \mu_{5x}y_7 + \mu_{6x})y_8 -$$

$$-(\mu_{4\theta}y_8 + \mu_{5\theta}y_7 + \mu_{6\theta})y_5 - -(\mu_{4\varepsilon}y_8 + \mu_{5\varepsilon}y_7 + \mu_{6\varepsilon})y_7 - \mu_{4t}y_8 - \mu_{5t}y_7 - \mu_{6t}$$

$$\begin{cases} D_{11} = A_1(t)\left[S_1(y_1 + y_1S'_1(y_1)\right] \\ F_1 = \gamma_1 y_7 - \ddot{\varepsilon}_{yt} - \gamma_1\dot{\varepsilon}_{yt} - A_1(t)\left[2S'_1(y_1) + y_1S''_1(y_1)\right]y_5^2 - \\ -A_2(t)\left[S_1(y_1)S'_1(y_1)\right]y_5 - A_3(t)\left[S_2(y_1) + y_1S'_2(y_1)\right]y_5 - \\ -A_4(t)y_1S_1(y_1) - A_5(t)y_1S_2(y_1) \end{cases}$$

$$D_{41} = f_* m_* y_1^{m_*-1},\ \ F_4 = -f_* m_*(m_*-1)y_1^{m_*-2}y_5^2, \qquad (23)$$

Таким образом решение задачи сведено к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (22) с переменным коэффициентами. Аналитическое решение этой существенно нелинейной системы не представляется возможным. Поэтому она решается численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка [9].

Для решения задачи Коши необходимо располагать начальными условиями. Первые четыре значения начального вектора определяются из следующей нелинейной системы алгебраических уравнений, которая получается из (7), (14) и (18) при $t=t_0$.

$$\begin{cases} y_{10}S_1(y_{10})\dfrac{R_{b0}}{E_{b0}} = y_{30} - \varepsilon_{yt_0}, \\ y_{10}\dfrac{y_{40}}{y_{20}+1} + \mu'_{s0}\dfrac{y_{30}}{y_{40}}(y_{40} - a'_s)(1-\omega'_{s0}) + \\ +\mu_{s0}\dfrac{y_{30}}{y_{40}}(y_{40} - 1 + a_s)(1-\omega_{s_0}) = 0, \\ y_{10}\left(\dfrac{y_{40}^2}{y_{20}+2} - \dfrac{y_{40}^2}{y_{20}+1}\right) + \mu'_{s0}(0,5-a'_s)\dfrac{y_{30}}{y_{40}}(y_{40}-a'_s)(1-\omega'_{s0}) - \\ -\mu_{s0}(0,5-a_s)\dfrac{y_{30}}{y_{40}}(y_{40}-1+a_s)(1-\omega_{s0}) = \bar{M}_0 \\ y_{20} = 1 - f_* y_{10}^{m_*} \end{cases} \qquad (24)$$

Для решения нелинейной системы алгебраических уравнений используется следующая численная методика. Так как заранее

ISSN 1562-9945

известны пределы изменения уровня сжимающих напряжений в крайнем сжатом волокне бетона $y_{10} \in [0;1]$, задаемся его значением. Тогда из первого и четвертого уравнений соответственно получим y_{30} и y_{20}. При этом второе уравнение системы (24) превращается в уравнение с одним неизвестным y_{40}. Оно решается известным методом [9]. Затем при найденных значениях неизвестных проверяется третье уравнение. По описанной схеме y_{10} и другие неизвестные могут быть определены с любой наперед заданной точностью. Описанный алгоритм легко программируется и на алгоритмическом языке Турбо-Паскаль составлена соответствующая процедура с входными и выходными параметрами.

Остающиеся четыре элемента начального вектора определяются как решение следующей линейной системы, которая получается из (7), (16) и (19) при $t=t_0$.

$$\begin{cases} d_1 y_{50} - y_{70} = -c_1 \\ d_2 y_{50} - d_3 y_{60} + d_4 y_{70} + d_5 y_{80} = c_2 \\ d_6 y_{50} + d_7 y_{60} + d_8 y_{70} + d_9 y_{80} = c_3 \\ d_{10} y_{50} + y_{60} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Входящие в эту систему коэффициенты определяются по результатам первой половины начального вектора, т.е. по результатам предыдущей системы уравнений (24):

$$d_1 = A_1(t_0)\left[S_1(y_{10}) + (y_{10})S_1'(y_{10})\right],$$

$$c_1 = A_6(t_0)y_{10}S_1(y_{10}) + A_7(t_0)y_{10}S_2(y_{10}) + \dot{\varepsilon}_{yt_0},$$

$$d_2 = \frac{y_{40}}{y_{20}+1};\, d_3 = \frac{y_{10}y_{40}}{(y_{20}+1)^2},$$

$$d_4 = \mu'_{st_0}\left(1 - \frac{a_s'}{y_{40}}\right)(1 - \omega'_{s0} - y_{30}\omega'_{s\varepsilon 0}) + \mu_{st_0}\left(1 - \frac{1-a_s}{y_{40}}\right)(1 - \omega_{s0} - y_{30}\omega_{s\varepsilon 0}),$$

$$d_5 = \frac{y_{10}}{y_{20}+1} + \mu'_{st_0} y_{30}\frac{a_s'}{y_{40}^2}(1 - \omega'_{s0}) - \mu'_{st_0} y_{30}\left(1 - \frac{a_s'}{y_{40}}\right)\omega'_{sx0} +$$

$$+\mu_{st_0} y_{30}\frac{1-a_s}{y_{40}^2}(1 - \omega_{s0}) - \mu_{st_0} y_{30}\left(1 - \frac{1-a_s}{y_{40}}\right)\omega_{sx0},$$

$$d_6 = \frac{y_{40}^2}{y_{20}+2} - \frac{y_{40}^2 - 0,5y_{40}}{y_{20}+1},\, d_7 = y_{10}\left(\frac{y_{40}^2 - 0,5y_{40}}{(y_{20}+1)^2} - \frac{y_{40}^2}{(y_{20}+2)^2}\right),$$

$$d_8 = \mu'_{st_0}(0,5 - a'_s)\left(1 - \frac{a'_s}{y_{40}}\right)(1 - \omega'_{s0} - y_{30}\omega'_{s\varepsilon 0}) -$$
$$-\mu_{st_0}(0,5 - a_s)\left(1 - \frac{1 - a_s}{y_{40}}\right)(1 - \omega_{s0} - y_{30}\omega_{s\varepsilon 0}),$$

$$d_9 = y_{10}\left(\frac{2y_{40}}{y_{20} + 2} - \frac{2y_{40} - 0,5}{y_{20} + 1}\right) + \mu'_{st_0}(0,5 - a'_s)y_{30}\frac{a'_s}{y_{40}^2}(1 - \omega'_{s0}) -$$
$$-\mu'_{st_0}(0,5 - a'_s)y_{30}\left(1 - \frac{a'_s}{y_{40}}\right)\omega'_{sx0} - \mu_{st_0}(0,5 - a_s)y_{30}\frac{1 - a_s}{y_{40}^2}(1 - \omega_{s0}) +$$
$$+\mu_{st_0}(0,5 - a_s)y_{30}\left(1 - \frac{1 - a_s}{y_{40}}\right)\omega_{sx0},$$

$$c_3 = \dot{\bar{M}}_{t_0} + \frac{R'_{bt_0}}{R_{bt_0}}\bar{M}_{t_0} - y_{10}\left(\frac{y_{40}^2}{y_{20} + 2} - \frac{y_{40}^2 - 0,5y_{40}}{y_{20} + 1}\right)\frac{R'_{bt_0}}{R_{bt_0}},$$

$$d_{10} = f_* m_* y_{10}^{m_* - 1};\ c_2 = -\frac{R'_{bt_0}}{R_{bt_0}} y_{10}\frac{y_{40}}{y_{20} + 1}$$

Разработанный алгоритм позволяет численно с любой наперед заданной точностью определить напряженно-деформированное состояние изгибаемого железобетонного элемента, а также построить зависимость кривизны от изгибающего момента с учетом нелинейно-наследственной ползучести бетона и упругопластической работы арматуры, что немаловажно при определении перемещений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М. Стройиздат, 1982, 287с.
2. Бондаренко С.В., Санжаровский Я.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. М., Стройиздат, 1990, 352с.
3. Гаджиев М.А. Расчет армированных элементов строительных конструкций с применением реальных нелинейных диаграмм кратковременного и длительного деформирования материалов. Баку, Элм, 1996, 266с.
4. Ильюшин А.А. Пластичность, М-Л, Гостехиздат, 1948, 380с.
5. Вищневецкий Г.Д. Введение в техническую теорию деформаций набухания и усадки бетона Тр. Ленинград.инж.стр. ин-та, 1957, вып.26, с.144-152.

 ISSN 1562-9945

6. Прокопович И.Е., Улицкий И.И. О теориях ползучести бетона. //Изв.вузов Строительство и архитектура, Новосибирск, 1963, №10, с.13-34.
7. Гаджиев М.А. Дифференциальная форма записи нелинейно-наследственного уравнения ползучести В.М.Бондаренко. //Региональный межвузовский сборник научных трудов «Системные технологии, вып.4(39), Днепропетровск, 2005, С.13-20.
8. Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. М. Стройиздат, 1973, 432с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., Наука, 1970, 664с.

Получено 14.03.2006 г.