УДК 621.51

А.И. Михалев, А.А. Стенин, М.А. Солдатова, А.С. Стенин

# МОДАЛЬНАЯ РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

*Аннотация. Основная идея предложенной в статье модальной робастной стабилизации технологических процессов с параметрической неопределенностью состоит в том, что при возможных допустимых вариациях параметров технологического процесса, переходные процессы в системе робастной стабилизации должны оставаться в пределах заданных допустимых областей (множеств) гарантированным образом. Границы этих множеств задаются соответствующим расположением корней замкнутой системы стабилизации.*

*Ключевые слова: технологические процессы, параметрическая неопределенность, робастная стабилизация, принцип гарантированной динамики, модальный синтез*

## Введение

В настоящее время большой интерес вызывают задачи оптимальной стабилизации заданных режимов работы различных объектов управления с параметрической неопределенностью. Особенно остро эта задача касается технологических процессов в различных отраслях производства, в частности, в машиностроении.

В большинстве случаев это связано, в первую очередь, с невозможностью точно определить параметры технологических процессов, упрощением описания математической модели, снижением степени сложности, пренебрежением существующих нелинейностей. Кроме того, параметры могут изменяться под действием внешних неконтролируемых возмущений и т.д. В этих случаях для обеспечения выполнения заданных режимов работы технологических процессов, а, следовательно, и обеспечения качества выпускаемой продукции, требуется постоянная коррекция параметров управляющего устройства, что не всегда удобно с практической точки зрения. Именно поэтому возникает необходимость создания робастных систем управления, которые обеспечивали бы требуемое качество функционирования в этих условиях. Созданию робастных систем управления посвящен целый ряд работ, в частности [1-6].

В работе [1] параметры управляющего устройства выбираются таким образом, чтобы обеспечить нечувствительность системы к произвольным неизвестным возмущениям. В работе [2] рассмотрены некоторые способы динамической компенсации ограниченных по величине возмущений. В работе [3] выделяется сигнал, несущий информацию о внешних и параметрических возмущениях системы с целью компенсации их влияния на регулируемую переменную. В работах [4-6] рассматривается задача выбора среди множества стабилизирующих регуляторов такого, который оптимизирует некоторый критерий, характеризующий качество управления. Наиболее распространенным ее решением является метод $H\infty$-оптимизации, который заключается в построении стабилизирующего регулятора для систем с возмущениями [4]. Регуляторы, синтезированные с использованием этого критерия оптимальности, обеспечивают устойчивость замкнутой системы и минимальную чувствительность к возмущениям. В работах [5,6] для конструирования субоптимального регулятора управляющее воздействие разложено на две составляющие: оптимальное управление, которое позволяет минимизировать заданный интегральный функционал качества, а компенсация неопределенностей в объекте базируется на подходе, предложенном в [2].

Данная статья является развитием указанных работ и посвящена разработке модального подхода к обеспечению робастной устойчивости функционирования технологических процессов в режимах стабилизации с одновременным обеспечением заданных показателей качества переходных процессов. Синтез статического робастного линейно-квадратичного регулятора с гарантированной динамикой переходных процессов в режимах стабилизации осуществляется на основе предложенного авторами в работе[10] модального синтеза линейных динамических систем и принципа гарантированной динамики [9].

 ISSN 1562-9945

## Постановка задачи

Пусть динамика отклонений от заданных значений управляемого и наблюдаемого технологический процесс с неопределенностью в параметрах описывается в режимах стабилизации системой линейных дифференциальных уравнений вида:

$$x(t) = (A + \Lambda)x(t) + Bu(t); \tag{1}$$

где $x$ – n-мерный вектор отклонений переменных состояния технологического процесса от заданных значений; $u(t) - m$-мерный вектор коррекции основного управления управления; A, B – матрицы коэффициентов размерностью (nЧn) и (nЧ m) соответственно; $\Lambda$ – неизвестная вещественная матричная функция неопределенностей размерности (nЧn).

Необходимо определить оптимальное управление $\overline{u}$(t), переводящее систему (1) из заданного начального состояния $\overline{x}$(t0) = x0 в конечное $\overline{x}(\infty) = 0$ и минимизирующее квадратичный функционал вида:

$$I_\sigma = \int_{t_0}^{t_k} \left[\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\overline{x}(t) + \overline{u}^{\mathrm{T}}(t)R\overline{u}(t)\right] d\tau, \tag{2}$$

где $t_0 = 0$; $t_k = \infty$ , а $Q$ и $R$ – положительно определенные матрицы размерностью ($n$*$n$) и ($m$*$m$) соответственно.

## Обзор существующих решений

В приведенной выше постановке задача стабилизации заданных режимов работы технологических процессов с неопределенностью в параметрах относится к линейно-квадратичным задачам оптимизации, которая сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения Риккати, решение которого дает искомые значения неизвестных коэффициентов в законе оптимального управления, представляющего собой линейную комбинацию переменных состояния технологического процесса. В зависимости от вида матрицы неопределенностей $\Lambda$ , существует два основных подхода к решению поставленной задачи стабилизации, связанные с решением уравнения Риккати [7].

В первом случае рассматривается система вида

$$\dot{x}(t) = [A + \Lambda(\mu)]\overline{x}(t) + B\overline{u}(t), \tag{3}$$

где $\lim\limits_{\mu \to 0} \Lambda(\mu) = 0,$ а $\mu$ – параметрическая неопределенность, удовлетворяющая неравенству

$$\|\Lambda(\mu)\| \leq \mathrm{I}_A \|\mu\|. \tag{4}$$

Тогда, согласно [7], оптимальное управление можно представить в виде:

$$\bar{u}(t) = -(K + k)\bar{x}(t), \tag{5}$$

где K – матрица коэффициентов оптимального закона стабилизации системы (1) при отсутствии матрицы неопределенностей $\Lambda$, а k – матрица коэффициентов компенсации влияния неопределенностей на параметры системы (1), определяемая как

$$k = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} B^{\mathrm{T}} P(\varepsilon) = 0, \quad P(\varepsilon) \geq 0. \tag{6}$$

В формуле (6) $P(\varepsilon)$ определяется из уравнения Лурье-Риккати

$$A^{\mathrm{T}} P(\varepsilon) + P(\varepsilon)\mathbf{A} - \varepsilon^{-1} B B^{\mathrm{T}} P(\varepsilon) + I = 0. \tag{7}$$

Здесь $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} P(\varepsilon) = P,$ где $P$ – решение уравнения Риккати для системы (1) при отсутствии матрицы неопределенностей $\Lambda$.

Во втором случае считается, что матрица параметрических возмущений принадлежит некоторому множеству параметризации E при фиксированных матрицах Q и R и определяется как

$$E(A + \Lambda(\mu))_{\mathrm{m}} = {}^{1}/_{2}\, B R^{-1} B^{\mathrm{T}} P - {}^{1}/_{2}\, P^{-1} Q - mP, \tag{8}$$

где

$$m^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_1 & 0 & m_4 & m_5 \\ -m_2 & -m_4 & 0 & m_6 \\ -m_3 & -m_5 & -m_6 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

кососимметрическая матрица, элементы которой mi определяются по теореме Харитонова [8] о робастности линейных динамических систем. Формула (9) осуществляет канонизацию матрицы и используется в дальнейшем для определения компенсационного управления k в законе оптимальной стабилизации (5).

Обозначив канонизированную матрицу $A + \Lambda(\mu)$ через A*, определим все множество компенсационных регуляторов k согласно работе [8] как

$$[\![E(k)]\!]_{\downarrow\beta\pi} = B^{\uparrow *} (\mathbf{A}^{\uparrow *} - 1/2\, B R^{\uparrow}(-1)\, B^{\uparrow}\mathrm{T}\, PQ + (\beta)_{\downarrow} k\, P + \mathbf{B}^{\uparrow} R\, \boldsymbol{\pi}, \tag{10}$$

где $B^*$ и $\mathbf{A}^*$ – канонизированные матрицы; $\pi$ – произвольная матрица подходящего размера; $\beta$ – кососимметрическая матрица; $B^R$ – правый делитель нуля максимального ранга [8]. В результате, можно утверждать, что синтезированный таким образом регулятор (5) является робастным на множестве параметризации (8) и минимизирует функционал (2).

Рассмотренные подходы к синтезу оптимального закона стабилизации технологических процессов с неопределенностью в параметрах достаточно сложны в реализации и не могут обеспечить требуемые динамические показатели переходных процессов в режимах стабилизации. Этих недостатков лишена предлагаемая в данной статье модальная робастная стабилизация.

**Модальная робастная стабилизация**

С учетом (1) и (5) запишем уравнение замкнутой оптимальной системы в виде:

$$\dot{\bar{x}}(t) = [\mathbf{A} + K]\bar{x}(\mathbf{t}) + [\mathbf{\Lambda} + k]\bar{x}(\square). \tag{11}$$

Пусть из технологических соображений известны ограничения на элементы матрицы параметрической неопределенности $\mathbf{\Lambda}$, связанные с погрешностью идентификации, т.е.

$$|\lambda_{ij}| \le \Lambda^{0}_{\mathbf{ij}}, \tag{12}$$

а также показатели качества на переходные процессы для переменных состояния в виде:

$$|\mathbf{x_i}(t)| \le \boldsymbol{\sigma}^{0}_{\mathbf{i}}. \tag{13}$$

Требуется синтезировать закон управления (5) при условиях (12) и обеспечить заданные показатели качества переходных процессов (13) в системе стабилизации технологических процессов с параметрической неопределенностью.

Предлагаемая ниже модальная робастная стабилизация базируется на модальном синтезе, предложенным авторами в работе [10], и принципе гарантированной динамики [9]. В основу принципа гарантированной динамики положена концепция допустимости, использующая в качестве оценки первичные показатели качества переходных процессов, таких как время переходного процесса, динамическая и статическая точность и др..

Запишем уравнение (11) в координатной форме

$$|\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}(t)| = \sum_{j=1}^{n} [\![\left(a_{ij} + \mathbf{K}_{ij} + k_{ij}]\!] + \boldsymbol{\lambda}_{ij}\right) x_{\square}(\mathbf{t}). \tag{14}$$

В соответствии с работой [9] условия (13) выполняются, если

$$\int_0^t x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau \leq \int_0^t \sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau, \qquad i = 1,2\ldots,n;\ t \in [0,\infty]. \tag{15}$$

Подставляя выражение (14) в (15) получим

$$\int_0^t \left[\sum_{j=1}^{n} \llbracket\left(a_{ij} + \mathbf{K}_{ij} + k_{ij}\rrbracket + \boldsymbol{\lambda}_{ij}\right) x_j(\boldsymbol{\tau})\right] x_i(t)d\tau \leq \int_0^t \sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau, \tag{16}$$

где $i = 1,2\ldots,n;\ \ t \in [0,\infty]$.

Зададим $\sigma_i^0(t)$ в виде

$$\sigma_i^0(t) = \sigma_i^0 e^{\alpha t}. \tag{17}$$

где $\sigma_i^0$ выбираются как оценки максимально возможных отклонений $x_i(t)$ в начальный момент времени, а $\alpha$ определяется из условия заданной степени затухания $\beta_i$ переходного процесса (рис.1) и одинаково для всех переменных состояния,т.е.

$$e^{\alpha t_k} \leq \beta_i, \tag{18}$$

где $\alpha \leq 0, t_k$ – заданное время переходного процесса.

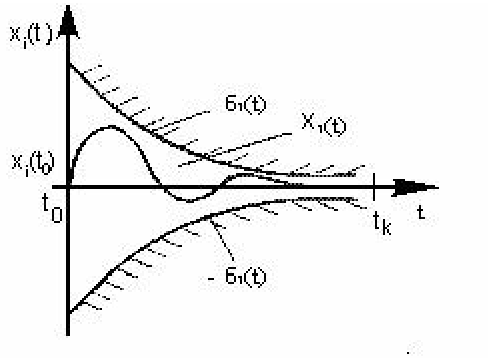


Рисунок 1 - Границы допустимой области изменения i-го параметра

Указанные динамические показатели переходных процессов обеспечиваются соответствующим выбором спектра корней замкнутой оптимальной системы согласно работе авторов [10].

С учетом (13), (17) и (18) уравнение (16) примет вид:

$$\int_0^t \left[\sum_{j=1}^{n} \llbracket\left(a_{ij} + K_{ij} + k_{ij}\rrbracket + \boldsymbol{\lambda}_{ij}^0\right) \boldsymbol{\sigma}_j^0\right] \boldsymbol{\sigma}_i^0 e^{2\alpha\tau}d\tau \leq \int_0^t \alpha\left(\sigma_i^0\right)^2 d\tau, \tag{19}$$

где $i = 1,2\ldots,n;\ \ t \in [0,\infty]$.

Интегрируя неравенство (19) на интервале $t \in [0,\infty]$, получим систему линейных алгебраических неравенств

 ISSN 1562-9945

$$\int_0^t \left[ \sum_{j=1}^{n} [\![ \left( a_{ij} + K_{ij} + k_{ij} ]\!] + \lambda_{ij}^0 \right) \sigma_j^0 \right] \sigma_i^0 e^{2\alpha\tau} d\tau \le \alpha\sigma_i^0, i = 1, 2 \dots, n. \quad (20)$$

Неравенства (20) гарантируют принадлежность переходных процессов к заданным допустимым множествам, что в свою очередь гарантирует не только устойчивость синтезированной робастной системы автоматического оптимального управления технологическим процессом с параметрической неопределенностью, но и обеспечение заданного качества их переходных процессов в режиме стабилизации

Отсюда следует, что множество значений $k_{ij}$, удовлетворяющее системе неравенств (20), обеспечивает робастность системы (1) к параметрическим возмущениям (12) на основе закона управления (5), полученного на основе принципа гарантированной динамики [9] и процедуры модального синтеза [10]. Одним из вариантов практического определения значений компенсационных регуляторов $k_{ij}$ является решение системы равенств (20) на границах допустимых областей $+\alpha\sigma_i^0$ и $-\alpha\sigma_i^0$ с помощью известных численных методов[11].

**Заключение**

В работе предложен один из подходов к синтезу робастных систем оптимальной стабилизации технологических процессов в условиях неопределенности их параметров. Процедура модального робастного синтеза базируется на принципе гарантируемой динамики, что позволяет решить проблему не только устойчивости, но и требуемого качества управления, и состоит в том, что при возможных допустимых вариациях параметров объекта, переходные процессы в системе стабилизации должны оставаться в пределах заданных допустимых областей (множеств) гарантированным образом. Границы этих множеств задаются соответствующим расположением корней проектируемой системы и заданной допустимой погрешностью идентификации параметров системы.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

2. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – с. 103–115.

3. Бобцов А. А., Пыркин А. А. Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 4. – с. 19–23.

4. Методы классической и современной теории автоматического управления. Теория оптимизации автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2004. – Т. 4. – 744 с.

5. Atassi A. N., Khalil H. K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, N 9. – P. 1672–1687.

6. Галяув Е. Р., Фуртат И. Б. Робастное субоптимальное управление линейными объектами по выходу // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2010. – № 8. – с. 24–31.

7. Буков В.Н. Аналитический синтез робастных регуляторов на основе параметризации уравнения Лурье-Риккати / В.Н. Буков, Н.И. Сельвесюк // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №2. – с. 6-16.

8. Буков В.Н. Решение матричных уравнений методом канонизации / В.Н. Буков, В.Н. Рябченко, В.В. Косьянчук, Е.Ю. Зыбин // Вестник Киевского ун-та : Сер. Физ.-мат. науки.– К.: Изд-во Киевского нац. ун-та, 2002. – Вып. 1. – с. 19-28.

9. Оморов Т.Т. Принцип гарантированной динамики в теории систем управления. Кн.1.Бишкек.-Илим.2001.-150с.

10. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, М.М.Ткач, В.П.Пасько. Модальный синтез оптимальных законов стабилизации линейных стационарных систем Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia.№ 30, 2016.pp.11-16.

11. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. 3-е изд.-СПб.: Изд-во «Лань», 2005. -288 с.

 ISSN 1562-9945